

UNIVERSAL  
LIBRARY

**OU\_224530**

UNIVERSAL  
LIBRARY

**BROWN BOOK**









سلسلہ شریعت اسلامیہ

## صغاری احصاء

جلد دوم

تصنیف

ہویر الیمب ایم۔ اے ایل ایل ڈی، ایس۔ سی۔ ڈی، ایف۔ آر۔ ایس

ترجمہ

قاضی محمد حسین ایم۔ اے و کشن چند ایم۔ اے

پروفیسر ان گلیہ جامعہ عثمانیہ

۱۳۳۸ھ ۱۳۳۸ھ ۲۹ سالہ

طبع و نشر دارالکتاب اسلامیہ لاہور

یہ کتاب مسرز میکملن اینڈ کمپنی کی اجازت سے جن کو  
حق اشاعت حاصل ہے اردو میں ترجمہ کر کے  
طبع و شائع کی گئی ہے

## دیباچہ (از مصنف)

اس کتاب کے پہلے ایڈیشن کے دیباچہ میں یہ بیان کیا گیا تھا کہ اس میں احصاء کے اُن حصوں کو سمجھانے کی کوشش کی گئی ہے جو زیادہ تر اس مضمون کے اطلاقات کے لحاظ سے خاص اہمیت رکھتے ہیں۔ اُس وقت اس کی ترتیب کچھ غیر معمولی سی تھی لیکن معلوم ہوتا ہے کہ یہ ہولت بخش ثابت ہوئی ہے اس ایڈیشن کی مکمل نظر ثانی کی گئی ہے اور اس میں متعدد تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں۔ علاوہ معمولی ترمیمات اور ترتیب کی تبدیلیوں کے ایک دو باتوں کا ذکر کر دینا ضروری معلوم ہوتا ہے۔

ایک خاص باب قوت نما اور اس سے متعلق تفاعلوں کے لئے وقف کر دیا گیا ہے۔ قوت نما تفاعل کی تعریف یہ کی گئی ہے کہ یہ مساوات

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ما}$$

کا معیاری حل ہے۔ اس تفاعل کی اہمیت ریاضیات میں صرف اسی خاصیت کی وجہ سے ہے اور اس لئے اس کی ابتدا اس خاصیت سے کرنا ہی واجب معلوم ہوتا ہے۔ سلسلہ قوت نما کا کوئی نظریہ جو باضابطہ کہلائے جانیکا کچھ مستحق ہو سکتا ہے بالکل ابتدائی نہیں کہا جاسکتا لیکن

یہ کہنا بیجا نہ ہو گا کہ وہ طریقہ جس کی یہاں پابندی کی گئی ہے علم احصاء کے تعلق کے مد نظر کسی اور طریقہ سے زیادہ مشکل نہیں اور ہر لحاظ سے قابل ترجیح بھی ہے۔

لاستثنای سلسلوں کی بحث میں خاص طور پر ان کے تفرق اور سمجھنے کے متعلق کئی تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں پہلی اشاعتوں میں ان سوالوں پر کیا استنتاج کے نظریہ کی مدد سے عام طریق پر بحث کی گئی تھی احصاء کی کتاب میں اس وقت اس نظریہ کا دخل کر لینا شاید عجیب نہ تھا جبکہ کسی انگریزی مقالہ میں اس کا ملنا محال تھا لیکن کتاب کے باقی حصہ کے ساتھ موضوع کے لحاظ سے ذرا بے جوڑ ہونے کی وجہ سے اب اسکو ترک کر دیا گیا ہے۔ اسکی بجائے وہ بحث داخل کی گئی ہے جو صرف قوتی سلسلوں سے متعلق ہے اور زیادہ تر اسی نمونہ کے سلسلوں سے طالب علم کو واسطہ پڑیگا جب تک کہ وہ مضمون میں زیادہ اعلیٰ مدارج تک ترقی نہ کر جائے۔

کمیت کے مرکوزوں، دو درجی معیاروں، اور اسی قبیل کے چیزوں کا اختصار کیا گیا ہے یا انکو ترک کر دیا گیا ہے اور ان کا بیشتر حصہ مصنف کی دوسری کتابوں میں منتقل کر دیا گیا ہے فقط

جون ۱۹۱۴ء

ہولرس سب

# فہرست مضامین

صفحہ	مَضْمُونِ	صفحہ
	چھٹا باب	
	مکمل	
۲۲۱	سُلی کی نوعیت	۷۲
۲۲۳	معیاری شکلیں	۷۳
۲۲۶	ضابطوں کی سادہ توسیع	۷۴
۲۳۸	دو درجی نسب نامہ والی منطق کسریں	۷۵
۲۳۲	شکل (۱+۲+۳)	۷۶
۲۳۵	متغیر کی تبدیلی	۷۷
۲۳۸	مشقی تفاعلوں کا مکمل	۷۸
۲۴۰	مشقی ابدال	۷۹
۲۴۱	مکمل باخصص	۸۰

۲۴۴	متواتر تحویل سے تکمیل	۸۱
۲۴۶	تعمولی ضابطے (سلسل)	۸۲
۲۴۸	منطق کسروں کا تکمیل	۸۳
۲۵۱	ساوی اصلیں	۸۴
۲۵۳	دو درجہ اجزاء کے ضربی	۸۵
۲۵۷	غیر منطق تفاظوں کا تکمیل	۸۶
۲۶۰	اشدہ نمبری ۲۳ تا ۳۰	
<b>ساتواں باب</b>		
<b>محدود تکمیل</b>		
۲۷۴	تمہید - رقبوں کا سوال	۸۷
۲۷۸	منقولہ تفرق کے ساتھ تعلق	۸۸
۲۸۰	تکملہ کی عام تعریف	۸۹
۲۸۳	استدقاق کا ثبوت	۹۰
۲۸۷	فضا (لا) فرلا کی خاصیتیں	۹۱
۲۸۹	مجاہد و تکملہ کا تفرق اسکی کسی حد کے لحاظ سے	۹۲
۲۹۰	نامحدود تکملہ کا وجود	۹۳
۲۹۱	محدود تکملہ کے محسوب کرنیکا قاعدہ	۹۴
۲۹۳	وہ صورتیں جہاں تفاضل فضا (لا) یا تکمل کے حدود	۹۵
۲۹۶	لامتناہی ہو جاتے ہیں۔	
۲۹۷	دفعہ ۹۴ کے قاعدہ کا استعمال	۹۶
۲۹۸	تعمولی ضابطے	۹۷
۳۰۲	مربوطہ تکمیل	۹۸

۳۰۴	امثلہ نمبری ۳۱ تا ۳۵	
	اکھواں باب	
	ہندی استعمال	
۳۱۷	رقبہ کی تصریح	۹۹
۳۱۸	کارٹینیہی محدودوں میں رقبہ کے لئے ضابطہ	۱۰۰
۳۲۱	رقبہ کو کیا علامات دیکھائی جائے	۱۰۱
۳۲۴	قطبی محدودوں کے لحاظ سے رقبے	۱۰۲
۳۲۶	رقبہ جو ایک متحرک خط اپنی حرکت میں عبور کرتا ہے	۱۰۳
۳۲۹	ایسٹریکٹ سطح پیمائے کا نظریہ	۱۰۴
۳۳۲	جسموں کے حجم	۱۰۵
۳۳۴	کسی جسم کے حجم کے لئے عام جملہ	۱۰۶
۳۳۶	گرہشی جسم	۱۰۷
۳۳۷	بعض متعلق صورتیں	۱۰۸
۳۳۸	سینس کا قاعدہ	۱۰۹
۳۴۱	منحنی خطوط کا طول معلوم کرنا	۱۱۰
۳۴۴	تقسیم شدہ ضابطے	۱۱۱
۳۴۷	قطبی محدودوں کے لحاظ سے توہیں	۱۱۲
۳۴۹	گرہشی سطحوں کے رقبے	۱۱۳
۳۵۲	تقریبی پیمائے	۱۱۴
۳۵۷	اوسط قیمتیں	۱۱۵
۳۶۰	ہندی اشکال کے اوسط مرکز	۱۱۶
۳۶۴	پیمائے کے مسئلے	۱۱۷
۳۶۸	منحنی سطح	۱۱۸



۳۷۴	امثلہ نمبر ۳۶ تا ۴۱	
	<b>نواں باب</b>	
	<b>خاص منحنی</b>	
۳۸۹	جبر منحنی جو ایک تشاکل کا محور کہتے ہیں	۱۱۹
۳۹۷	مادرائی منحنی	۱۲۰
۴۰۰	سیاروں کے منحنی	۱۲۱
۴۰۳	خط تدویر	۱۲۲
۴۰۷	برزدویر اور درتدویر	۱۲۳
۴۱۱	خاص صورتیں	۱۲۴
۴۱۶	دائری حرکتوں کا ایک دوسرے پر انطباق - بردورے	۱۲۵
۴۲۱	قطبی محدودوں کے لحاظ سے منحنی - گولبی خطوط	۱۲۶
۴۲۳	گہونگا منحنی اور خط صنوبری	۱۲۷
۴۲۵	منحنی $\Gamma = \Gamma$ جسم ن طہ	۱۲۸
۴۲۶	عماسی قطبی مساوات	۱۲۹
۴۲۹	مربوط منحنی - تغلیب	۱۳۰
۴۳۲	پائیں منحنی - متکافی قطبی	۱۳۱
۴۳۷	دو قطبی عدد	۱۳۲
۴۴۲	امثلہ نمبر ۴۲ تا ۴۵	
	<b>دسواں باب</b>	
	<b>انحناء</b>	

۴۵۴	انحناء کا ناپ	۱۳۳
۴۵۸	منحنی کی ذاتی مساوات	۱۳۴
۴۶۱	نیم قطر انحناء کے لئے ضابطہ	۱۳۵
۴۶۴	نیوٹن کا طریقہ	۱۳۶
۴۶۸	لٹھی دائرہ	۱۳۷
۴۷۰	لفاف	۱۳۸
۴۷۱	لفاف دریافت کرنیکا عام طریقہ	۱۳۹
۴۷۳	جبریلہ طریقہ	۱۴۰
۴۷۵	لفافوں کی تماشائی خاصیت	۱۴۱
۴۷۸	برہمنیچسکی قوس	۱۴۲
۴۸۳	دریچے اور متوازی منحنی	۱۴۳
۴۸۶	متحرک تشکل کا فوری مرکز	۱۴۴
۴۸۸	لڑکنے والے منحنیات میں استعمال	۱۴۵
۴۹۳	نقطہ گردونیہ کا انحناء	۱۴۶
۴۹۵	خط گردونیہ کا انحناء	۱۴۷
۴۹۹	کسی تشکل کی مسلسل حرکت اپنی مستوی سطح میں	۱۴۸
۵۰۱	بر دو بیوں کی بطور گردونیوں کے دوہری تکوین	۱۴۹
۵۰۳	مشکل نمبر ۴ تا ۹	۱۵۰
۵۰۶		





# حصہ دوم

## پچھٹا باب

### تکمل

۲۔ مسئلہ کی نوعیت ۔ ابواب گذشتہ میں ہم نے

تفاعلوں کے تغیر کی شرح پر غور کیا ہے۔ احصائے کمالات کی طرف اب ہم رجوع ہوتے ہیں بالکل الگ مسئلہ سے تعلق رکھتا ہے۔ یعنی اگر تفاعل کے تغیر کی شرح دی ہوئی ہو اور متبوع متغیر کی کسی خاص قیمت کے لئے تفاعل کی قیمت مقرر کر دی گئی ہو تو متبوع متغیر کی کسی اور قیمت کے لئے ہمیں تفاعل کی قیمت دریافت کرنا ہے۔ علامتوں میں

سادات

$$\text{فما} = \frac{\text{فلا}}{\text{فلا}} \quad (۱) \dots \dots \dots (۱)$$

کامل درکار ہے جبکہ فما (فلا) متغیر لا کا دیا ہوا تفاعل ہے اس شرط کے تحت کہ لا کی کسی مقررہ قیمت (فرض کر دو) کے لئے ما ایک خاص قیمت (ب) اختیار کرے۔ مثلاً متحرک نقطہ کی رفتار کا قانون اور وقت ت پر نقطہ کا مقام دیا گیا ہو تو ان امور کی بنیاد پر کسی وقت ت پر نقطہ کا مقام دریافت کرنا مقصود ہو سکتا ہے۔ یہ بات

$$\text{سادات} = \frac{\text{فمس}}{\text{فمس}} = \text{فما} (ت) \dots \dots \dots (۲)$$

کو عمل کرنے کے معادل ہے جس میں فما (ت) وقت ت کا معلوم تفاعل ہے اس شرط کے تحت کہ ت = ت کے لئے مس = مس۔

اگر ہم ایک مسلسل تفاعل طہ (لا) ایسا دریافت کر سکیں کہ

$$\text{طہ (لا)} = \text{فہ (لا)}$$

تو مساوات (۱) ذیل کی شکل میں تبدیل ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فہ}}{\text{طہ (لا)}} \quad (۳)$$

پس اگر ما پر مسلسل ہونے کی قید لگا دی جائے جو احصا کے اکثر عملی اطلاقات کی صورت میں پوری ہوتی ہے تو دفعہ ۵۶ کے مطابق

$$\text{ما} = \text{طہ (لا)} + \text{م} \quad \text{جہاں م مستقل ہے} \quad (۴)$$

مساوات (۱) کا جہاں تک تعلق ہے مستقل م کی ٹھیک قیمت غیر معین ہے اور اس لئے م اختیار ہی مستقل کہلاتا ہے اس سے فائدہ یہ ہے کہ اس کی مدد سے سوال کی باقی ماندہ شرط جس کا ذکر اوپر ہو چکا ہے پوری ہو سکتی ہے۔

$$\text{پس اگر لا} = \text{ل کے لئے ما} = \text{ب تو}$$

$$\text{ب} = \text{طہ (ل)} + \text{م}$$

$$\text{اور اس لئے} \quad \text{ما} - \text{ب} = \text{طہ (لا)} - \text{طہ (ل)} \quad (۵)$$

اگر دفعہ ۲۵ کے مطابق عامل فرہ کے لئے علامت عف کام میں

لائی جائے تو مساوات (۱) ذیل کی شکل میں لکھی جاسکتی ہے

$$\text{عف} = \text{ما} = \text{فہ (لا)} \quad (۶)$$

اور جب یہ تقیم کے اصولوں کے مطابق اس کا عامل

$$\text{ما} = \text{عف} = \text{فہ (لا)} \quad (۷)$$

کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے جبکہ مقلوب عامل عف کی تعریف یہ ہو کہ

$$\text{عف} = \{ \text{عف} = \text{فہ (لا)} \} = \text{فہ (لا)} \quad (۸)$$

تفاعل عف = فہ (لا) (۹)

اگر اس کا وجود ہو تو فہ (لا) کا لحاظ لا کے نامحدود و مکمل کہلاتا ہے۔

عام طور پر اسکو ہم

۴ فم (۹) فرلا ..... (۱۰)

سے تعبیر کریں گے۔

(۹) اس ترقیم کی ابتدا کی وجہ اگلے باب میں سمجھائی جائے گی۔ فی الحال (۱۰) کو  
کے لکھنے کا ایک دوسرا طریقہ خیال کرنا چاہئے۔

ریاضی کی اکثر شاخوں میں سید سے اور تغلوب اعمال کے درمیان امتیاز کرنا اکثر ضروری  
ہوتا ہے۔ سید حاصل وہ ہے جو مقررہ قاعدوں کے مطابق کسی دئے ہوئے تفاعل پر ہمیشہ حاصل  
ہو سکے اور اس سے غیر متنبہ نتیجہ حاصل ہو۔ تغلوب عمل کی نوعیت ایک سوال کی ہی ہے یہاں میں  
وہ تفاعل دریافت کرنا ہوتا ہے جس پر ایک خاص طریقہ سے عمل کرنے سے ایک مقررہ نتیجہ حاصل  
ہو۔ ممکن ہے کہ اس سوال کا جواب ہو یا اسکا جواب نہ ہو یا ایک سے زیادہ جواب ہوں (۱۱) دیکھو  
دفعہ (۱۶)۔ عامل عفت کی صورت میں ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اگر اسکا ایک جواب موجود  
ہو تو جمع کردہ متقل ہر کے غیر متعین ہونے کی وجہ سے جوابوں کی تعداد دلاؤنتا ہوگی۔ لیکن ہر صورت  
میں جواب ملتا ہے یا نہیں ابھی تحقیق طلب ہے۔ تاہم ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ مسلسل تفاعل کا  
نامحدود و تکملہ وجود کرتا ہے اگرچہ اس وسعت کے ساتھ اس مسئلہ کو ثابت کرنا ضرور ہمیں نیاں پرکھی  
اس باب کے باقی ماندہ حصے میں ہم مختلف اقسام کے ریاضی تفاعلوں کے  
نامحدود و تکملہ عملی طور پر دریافت کرنے کے سوال پر غور کریں گے۔  
مثال۔ اگر ایک متحرک نقطہ کی رفتار ۶ + ج ت دی ہوئی ہے تو

$$\text{فرس} = ۶ + ج ت = \text{فرت} \times (۶ + ج ت) \dots\dots (۱۱)$$

پس س = ۶ ت + ۱ ج ت + م ..... (۱۲)  
شرط س = س بوقت ت = ت سے م کو دریافت کر کے درج  
کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{س} - \text{س} = ۶ (ت - ت) + (ج - ج) (ت - ت) \dots\dots (۱۳)$$

۳۔ معیاری شکلیں :- کوئی ایسے ال قوانین موجود نہیں ہیں جنکی

مد سے کسی دے ہوئے مسلسل تفاعل فہ (لا) کا 'نامحدود کملہ'  
 ل فہ (لا) فرلا یا عفا فہ (لا) دریافت ہو سکے۔ جیسا کہ اوپر بتایا  
 جا چکا ہے محل متکوب عمل ہے جس میں تفرق کے سیدھے عمل کے پہلے نتیجوں  
 کی یادداشت ہی رہنا بنائی جاسکتی ہے۔

نیز اگرچہ کملہ ایک خاص معنی میں ہمیشہ وجود رکھتا ہے لیکن ممکن ہے کہ یہ ریاضی میں  
 عام طور پر استعمال ہونے والے جبر یا ماورائی تفاعلوں کے رقوم میں (محدود شکل میں)  
 بیان نہ ہو سکے۔ اسکی مثالیں ہیں

$$ل \text{ ہو } لا \text{ فرلا} ، ل \text{ جب } لا \text{ فرلا} ، ل \text{ فرلا} \frac{لا}{لا + لا}$$

اور انکی فہرست آسانی سے بے حد بڑھائی جاسکتی ہے۔  
 محکمات کی کم بیش باقاعدہ فہرست بنانے کے لئے سب سے پہلے ہمیں یہ کرنا چاہئے  
 کہ مختلف سادہ تفاعلوں کے تفرقات کی ایک فہرست بنالیں۔ ان میں سے ہر ایک  
 عمل کی تقلب سے نامحدود مکمل کا ایک ضابطہ حاصل ہو جائیگا۔ اختیاری مستقل کو  
 جو ہر نامحدود مکملہ میں جمع کیا جاتا ہے صیرگی طور پر درج کرنے کی چنداں ضرورت  
 نہیں ہے لیکن بعض اوقات ایک ہی جملہ کے دو مختلف طریقوں سے حاصل کئے  
 ہوئے محکمات میں صرف مستقل کا فرق ہوتا ہے ایسے موقعوں پر اختیاری مستقل کی  
 غیر موجودگی طالب علم بر شدت سے محسوس ہوگی۔

طالب علم کو ذیل کے اساسی نتیجوں سے پوری واقفیت حاصل کرنی چاہئے۔

$$\text{فرلا} \frac{لا}{لا} = (ن) لا^{-1} \quad ل \text{ لا } فرلا = \frac{1}{لا + لا} \times لا^{\frac{1}{2}} \text{ [سوا جبکہ } لا = 1 \text{]} (د)$$

$$\text{فرلا} \frac{لا}{لا} = \text{لوک لا} = \frac{1}{لا} \quad ل \text{ لا } فرلا = \text{لوک لا} = \frac{لا}{لا} \dots (ج)$$

$$\text{فرلا} \text{ ہو } لا = \text{مک } لا \quad ل \text{ ہو } فرلا = \frac{1}{لا} \times \text{مک } لا \dots (ج)$$

$$\text{فرلا} \text{ جب } لا = \text{جم لا} \quad ل \text{ جم لا } فرلا = \text{جب لا} \dots (د)$$

فرلا $\frac{فر}{لا}$ جم لا = جب لا	کی جب لا فرلا = جم لا ..... (ع)
فرلا $\frac{فر}{لا}$ سر لا = قط لا	کی قط لا فرلا = سر لا ..... (ف)
فرلا $\frac{فر}{لا}$ قم لا = قم لا	کی قم لا فرلا = مم لا ..... (گ)
فرلا $\frac{فر}{لا}$ جب لا = $\frac{ا}{لا - لا}$	کی $\frac{فرلا}{لا - لا} = جب لا^*$ ..... (ح)
فرلا $\frac{فر}{لا}$ سر لا = $\frac{ا}{لا + لا}$	کی $\frac{فرلا}{لا + لا} = سر لا$ ..... (ط)
فرلا $\frac{فر}{لا}$ جنب لا = جنب لا	کی جنب لا فرلا = جنب لا ..... (ث)
فرلا $\frac{فر}{لا}$ جنب لا = جنب لا	کی جنب لا فرلا = جنب لا ..... (ک)
فرلا $\frac{فر}{لا}$ مسر لا = قطر لا	کی قطر لا فرلا = مسر لا ..... (ل)
فرلا $\frac{فر}{لا}$ مم لا = قم لا	کی قم لا فرلا = مم لا ..... (م)
فرلا $\frac{فر}{لا}$ جب لا = $\frac{ا}{لا + لا}$	کی $\frac{فرلا}{لا + لا} = جب لا$ ..... (ن)
فرلا $\frac{فر}{لا}$ جنب لا = $\frac{ا}{لا - لا}$	کی $\frac{فرلا}{لا - لا} = جنب لا$ ..... (ط)

↑ علامت کے بارے میں دفعہ ۳۳ دیکھو۔

↑ علامت کے بارے میں دفعہ ۳۴ دیکھو۔



$$\frac{f_{r-1}}{f_r} = \frac{1}{r} \quad \text{اگر } r > 1, \quad \int \frac{f_{r-1}}{f_r} = \frac{1}{r} \ln f_r = \frac{1}{r} \ln f_r = \frac{1}{r} \ln f_r = \frac{1}{r} \ln f_r$$

$$\frac{\text{فرلا منتر } \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x}$$

ان میں سے چند ضابطوں کے استعمال میں ذرا احتیاط کی ضرورت ہے۔ اول تو (ح) (آ) (ن) (ط) (پ) (ق) میں ا کی علامت سہولت کے لئے مثبت لے لی گئی ہے۔ یہ ہمیشہ جائز ہے کیونکہ شکل میں صرف ا کا مروج قانع ہوتا، نیز جب 'ا' منفی ہو تو ضابطہ (ج) میں ترسیم کر لی جائے گی کیونکہ منفی مقدار کا ا کو کارنم نہیں ہوتا۔ اس صورت میں  $\alpha = -\alpha$  اور

ما = ٹوک لا رکھنے سے

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{1}{a}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرما}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرما}}$$

پس  $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

لا کے مثبت یا منفی جوڑنے کی دونوں صورتیں ذیل کے ضابطے میں شمرکی ہیں

۴  $\frac{7}{8}$  = لوگ ۱۵۱ ..... (ج)

نیز (ط) میں (لا کو مثبت مان لیا گیا ہے۔ اور (پ) میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ  $1 > 1$  اور (ق) میں کہ  $1 < 1$ ۔

۴۷ :- ضابطوں کی سادہ توسیع :- اوپر کے نتائج کی توسیع کرنے کے لئے

اول ہم یہ دیکھتے ہیں کہ لا میں مستقل جمع کر دینے سے ضابطوں کی شکل میں کوئی بنیادی فرق نہیں پڑتا۔ [دفعہ ۳۲ (۱) دیکھو]

پس ظاہر ہے کہ  $\frac{1}{(1+1)^m} = \frac{1}{1+m} (1+1)^{m-1} \dots (1)$

$\frac{1}{(1+1)^m} = \frac{1}{1+m} (1+1)^{m-1} \dots (2)$

$\frac{1}{(1+1)^m} = \frac{1}{1+m} (1+1)^{m-1} = \frac{1}{1+m} (1+1)^{m-1} \dots (3)$

اور اسی طرح - چند دیگر مثالیں دفعہ ۵ اور ۶ میں دی گئی ہیں -  
نیز اگر  $\frac{1}{(1+1)^m}$  کو مستقل  $m$  سے ضرب دیا جائے تو شکل پہلے جیسی ہی رہتی  
ہے سو اس مسئلہ کو  $m$  پر تقسیم ہو جاتا ہے - [دفعہ ۳۲ (۲) دیکھو]

مثلاً  $\frac{1}{(1+1)^m} = \frac{1}{1+m} (1+1)^{m-1} \dots (4)$

$\frac{1}{(1+1)^m} = \frac{1}{1+m} (1+1)^{m-1} \dots (5)$

۱۹۹

اور علیٰ ہذا القیاس -  
نیز  $\frac{1}{(1+1)^m} = \frac{1}{1+m} (1+1)^{m-1} \dots (6)$  جہاں  $m$  مستقل ہے

اور  $\frac{1}{(1+1)^m} = \frac{1}{1+m} (1+1)^{m-1} = \frac{1}{1+m} (1+1)^{m-1} \dots (7)$   
کیونکہ اگر دونوں طرف  $\frac{1}{(1+1)^m}$  سے عمل کریں تو ہر ایک صورت میں دفعہ ۲۹ اور ۳۰  
کی رو سے ایک مساوات کے متبادلہ حاصل ہوتی ہے - (۷) میں یہ فرض کر لیا گیا  
ہے کہ ارقام کی تعداد محدود ہے -

پس منطوق صحیح تفاعل  $\frac{1}{(1+1)^m} = \frac{1}{1+m} (1+1)^{m-1} \dots (8)$

کا نام محدود شکل  $\frac{1}{(1+1)^m} = \frac{1}{1+m} (1+1)^{m-1} \dots (9)$

اب فرض کرو کہ منطوق کسر کی شکل  $\frac{1}{(1+1)^m} = \frac{1}{1+m} (1+1)^{m-1} \dots (10)$

عمل تقسیم سے یا ایک منطق صحیح تفاعل اور کسر  $\frac{1}{2}$  ..... (۱۱)

کے حاصل جمع میں قبول ہو سکتی ہے۔ پہلے حصے کا ٹکڑا اوپر کے قاعدہ سے عمل میں لایا جاسکتا ہے اور (۱۱) کا ٹکڑا ہے  $\frac{1}{2}$  لوگ  $(1 + \frac{1}{2})$  ..... (۱۲)

$$\text{مثال (۱)} \quad \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{مثال (۲)} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \quad \frac{1}{2} \text{ لوگ } (1 - \frac{1}{2})$$

$$\text{مثال (۳)} \quad \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{مثال (۴)} \quad \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{مثال (۵)} \quad \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۷۵۔ دو درجی نسب نما والی منطق کسریں :- اب ہم بتائی گئی کہ

$$\text{فا (۱)} \quad \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

کی شکل کے کسی طرح کو شکل کر سکتے ہیں جہاں فا (۱) متغیر لا کا منطق صحیح تفاعل ہے۔ اگر ضرورت ہو تو شمار کنندہ کو نسب نما سے تقسیم کرو تاکہ باقی  $\frac{1}{2}$  کی شکل کا رہ جائے۔ پس تفاعل (۱) ایک منطق صحیح تفاعل اور کسر

$$\text{فا (۲)} \quad \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

کے حاصل جمع کی شکل میں ظاہر ہو سکتا ہے۔ پہلا حصہ دفعہ ۷۴ کے طریقہ سے شکل کیا جاسکتا ہے۔ اب صرف حصہ (۲) پر غور کرنا باقی ہے۔



نسب نمایں اس کے متناظر خروئی ضربی کو نکال دو اور باقی ماندہ جملہ میں لا = عا  
دیکھ کر دو۔ اسی طرح ب کے لئے۔

اگر پ = م ق تو

$$لا + پ لا + ق = (لا + پ) ق$$

اور 
$$ک (لا + پ) = \frac{لا}{لا + پ} = \frac{۱}{لا + پ} \dots (۱۰)$$

اگر پ > م ق تو

لا + پ لا + ق = (لا + پ) + (ق - پ) = (لا - عا) + عا + عا  
جس میں عا اور عا حقیقی ہیں اور عا کو مثبت لے لیا جاسکتا ہے۔  
اب دفعہ ۳ (آ) کی سادہ توسیع سے

$$ک (لا - عا + عا) = \frac{۱}{لا - عا} = \frac{۱}{لا - عا} \dots (۱۱)$$

پ < م ق والا نتیجہ (۱۱) کے مشابہ شکل میں لکھا جاسکتا ہے کیونکہ ہم کہہ سکتے ہیں  
لا + پ لا + ق = (لا + پ) - (پ - ق) = (لا - عا) - عا + عا  
جس میں عا اور عا حقیقی ہیں اور عا کو مثبت فرض کر لیا جاسکتا ہے۔ اب اگر  
لا - عا > عا سے تو دفعہ ۳ (پ) سے

$$ک (لا - عا) = \frac{۱}{لا - عا} = \frac{۱}{لا - عا} \dots (۱۲)$$

اس میں اگر عا + عا = عا اور عا - عا = عا رکھیں تو دفعہ ۴ سے برآسانی  
ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ (۹) کے معادل ہے۔  
اگر لا - عا < عا تو

$$ک (لا - عا) = \frac{۱}{لا - عا} = \frac{۱}{لا - عا} \dots (۱۳)$$

ابن بادہ عام شکل (۲) پر غور کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا اور عا کے مناسب  
انتخاب سے ہم یہ کر سکتے ہیں کہ

$$(۱۵) \dots\dots\dots (۲+لا+پ) + م = لا+ب$$

$$(۱۶) \dots\dots\dots لا = \frac{۱}{۲} اور م = ب - \frac{۱}{۲} لا+پ$$

$$پس \int \frac{لا+پ}{لا+پ+ق} فرلا = لا \int \frac{(۲+لا+پ)}{(لا+پ+ق)} فرلا + م \int \frac{لا+پ}{(لا+پ+ق)} فرلا$$

$$(۱۷) \dots\dots\dots$$

ظاہر ہے کہ بائیں طرف کے دو کلمات میں پہلا

$$(۱۸) \dots\dots\dots لوگ (لا+پ+ق)$$

کے مساوی ہے اور دوسرے پر اوپر بحث ہو چکی ہے۔

اگر نسب نامہ واقعی جداگانہ اجزاء میں تحویل ہو سکتے تو (۱۷) کے دائیں جانب کے شککہ کو جزوی کسروں کے طریقے سے زیادہ آسانی سے دریافت کر سکتے ہیں۔ مثلاً

$$(۱۹) \dots\dots\dots \frac{لا+ب}{(لا-ب)} + \frac{۱}{(لا-ب)} = \frac{لا+ب}{(لا-ب)}$$

$$بشرطیکہ لا+ب = لا (لا-ب) + (لا-ب) = (لا-ب) + (لا-ب)$$

$$(۲۰) \dots\dots\dots ب = - (لا-ب) + (لا-ب)$$

$$(۲۱) \dots\dots\dots لا = \frac{لا+م}{(لا-م)} اور ب = \frac{لا+م}{(لا-م)}$$

ہر صورت میں اس طول عمل کی ضرورت نہیں کیونکہ لا اور ب کی قیمتیں صفحہ (۲۲۹) پر کے طریقے سے باسانی دریافت ہو سکتی ہیں۔

$$پس (۱۷) کے تکمل سے \int \frac{لا(لا+ب) فرلا}{(لا-ب)(لا-م)} = لا \int \frac{لوگ (لا-م)}{(لا-ب)} + ب \int \frac{لوگ (لا-م)}{(لا-ب)}$$

$$(۲۲) \dots\dots\dots$$

مثال (۱)  $\int \frac{فرلا}{(لا-ب)-۲}$  کی قیمت دریافت کرو۔

$$\left[ \frac{ب}{(لا+۲)} + \frac{لا}{(لا-۱)} \right] = \frac{۱}{(لا+۲)(لا-۱)}$$

پس  $\int \frac{فرق}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{3} \text{ لوک } (x-1) + \frac{1}{3} \text{ لوک } (x-2) = \frac{1}{3} \frac{x}{x-1} + \frac{2}{3} \frac{x}{x-2}$

$$\frac{1+n}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} = \frac{\text{فرلا}}{(\frac{1}{2} + n) - \frac{9}{4}} \int = \frac{\text{فرلا}}{(1+n) - 1 - 2} \int$$

$$\frac{1}{1-y_2} \times \frac{1}{r} = \frac{\text{فرق}}{r(1-y_2)} \int = \frac{\text{فرق}}{r(y_2+y_1)r-1} \int \quad \text{مثال (2) -}$$

$$\text{مثال (۳) - } \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx = \frac{f(0)}{0^2 + 1} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{میں } \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} \text{ میں } \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\text{مثال (۳) -} \int \frac{y-1}{(y^2+y)-1} dy = \int \frac{(1-y)^2}{(y^2+y)-1} dy - \int \frac{1}{(y^2+y)-1} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{x^2} dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{x^2} dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{x^2} dx$$

$$\frac{b}{1+n} + \frac{a}{2-n} = \frac{(2-n)^2}{(1+n)(2-n)} \quad \text{فرض کرو کہ}$$

اس سے حاصل ہوتا ہے کہ  $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$  اور جب  $\frac{p}{q} = \frac{5}{2}$   
 اس لئے زیر بحث مسئلہ  $= \frac{1}{p} \text{ لوگ } (2-1) + \frac{1}{q} \text{ لوگ } (1+1)$

۷۶- شکل  $\frac{1 \text{ لا} + \text{ب}}{1 \text{ لا} + \text{ج} + \text{ب} + \text{لا}}$

اس قسم کے تقاعلوں کے لئے بھی اوپر سے ملتا جلتا طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔

(۱) اگر  $\Delta$  مثبت ہے تو یہ ذیل کی شکل کے معاملہ ہے

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{ا + لا + ب}{ا + لا + پ + ق}$$

سب سے پہلے مکمل ..... (۲) پر غور کرو۔

مربع کو کامل بنانے سے جذری علامت کے اندر کا جملہ (لا - عا)  $\pm$  بیہ کی ایک یا دوسری شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔ اب دفعہ ۷ (م) اور (ط) سے

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{فر لا}{ا + لا + عا + بیہ} = \text{جبر} \frac{۱ - عا - لا}{بیہ}$$

اور ..... (۴)  $\frac{فر لا}{ا + لا + عا - بیہ} = \text{جمن} \frac{۱ - عا - لا}{بیہ}$   
ان تفاعلوں کو ذیل کی شکلوں میں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{لا - عا + ا + لا + عا + بیہ}{بیہ} \text{ یا توک} \frac{لا - عا + ا + لا + عا + بیہ}{بیہ}$$

(۵) ..... [دفعہ ۴۶ دیکھو]  
عام صورت (۱) میں ہم فرض کرتے ہیں

$$(۶) \dots\dots\dots ا + لا + بیہ = لا (ا + لا + پ + ق) + عا$$

جو پوری ہوتی ہے اگر ..... (۷)  $لا = ا + لا + عا + بیہ - پ + ق$

$$\text{اس لئے } \frac{ا + لا + بیہ}{لا} = \frac{لا (ا + لا + پ + ق) + عا}{لا} \text{ یا } \frac{ا + لا + بیہ}{فر لا} = \frac{لا + عا + پ + ق}{فر لا + ا + لا + پ + ق}$$

(۸) ..... پہلے مکمل کے مساوی ہے اور دوسرے پاورچین ہو چکی ہے۔  
(۹) اب ہم فرض کرتے ہیں کہ اس دفعہ کی ابتدائی شکل میں کسر (۱) شفی ہے۔ تب  
عمومیت میں فرق آنے کے بغیر اسے - کے مساوی لیا جاسکتا ہے۔  
پہلے تفاعل



$$(۹) \dots\dots\dots \frac{۱}{۱اق + ۲پ - ۱لا}$$

پر غور کرو۔

اب سوائے اس صورت کے جبکہ دو درجی جگہ حقیقتاً منفی ہو (جس صورت میں لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے یہ خیالی ہوگا) جملہ کو بدھا۔ (۱ا - ۲پ) کی شکل میں تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

$$(۱۰) \dots\dots\dots \frac{۱ - ۱ا - ۲پ}{۱اق + ۲پ - ۱لا} = \text{جب}$$

$$(۱۱) \dots\dots\dots \frac{۱اق + ۲پ - ۱لا}{۱اق + ۲پ - ۱لا}$$

$$(۱۲) \dots\dots\dots ۱اق + ۲پ - ۱لا = ۱اق + ۲پ - ۱لا + ۱اق + ۲پ - ۱لا$$

$$(۱۳) \dots\dots\dots ۱اق + ۲پ - ۱لا = ۱اق + ۲پ - ۱لا + ۱اق + ۲پ - ۱لا$$

$$\text{اس لئے } \frac{۱اق + ۲پ - ۱لا}{۱اق + ۲پ - ۱لا} = \frac{۱اق + ۲پ - ۱لا}{۱اق + ۲پ - ۱لا}$$

$$(۱۴) \dots\dots\dots \frac{۱اق + ۲پ - ۱لا}{۱اق + ۲پ - ۱لا}$$

ان دو میں سے پہلا نکلہ ۱اق + ۲پ - ۱لا کے ساوی ہے اور دوسرے پر اوپر بکت ہو چکی ہے۔

$$\text{مثال ۱۔ } \frac{۱اق + ۲پ - ۱لا}{۱اق + ۲پ - ۱لا} = \frac{۱اق + ۲پ - ۱لا}{۱اق + ۲پ - ۱لا}$$

$$\frac{۱اق + ۲پ - ۱لا}{۱اق + ۲پ - ۱لا} = \frac{۱اق + ۲پ - ۱لا}{۱اق + ۲پ - ۱لا}$$

$$= \frac{۱اق + ۲پ - ۱لا}{۱اق + ۲پ - ۱لا}$$





$$(۵) \dots\dots\dots = \frac{\text{فر (مس لا)}}{\text{مس لا}} = \text{لوگ مس لا}$$

اس سے ہم اخذ کرتے ہیں

$$(۶) \dots\dots\dots = \frac{\text{فر لا}}{\text{ک جم لا}} = \frac{\text{ک جب (لا + لا)}}{\text{لوگ مس (لا + لا)}} = \text{لوگ مس (لا + لا)}$$

ضوابط (۱) تا (۶) معیاری نتیجے شمار ہوتے ہیں اور انہیں حفظ کر لینا چاہئے

$$(۳) \dots\dots\dots = \frac{\text{فر لا}}{\text{ک (ا + ب) جم لا}} = \frac{\text{ک (ا + ب) جم لا}}{\text{ک (ا + ب) جم لا + لا (ب - ا) جب لا}}$$

$$(۴) \dots\dots\dots = \frac{\text{ک (ا + ب) + (ا - ب) مس لا}}{\text{قط لا فر لا}}$$

اب ہمیں اگر مس لا = ع رکھیں تو

$$(۸) \dots\dots\dots = \frac{\text{فر ع}}{\text{ک (ا + ب) + (ا - ب) ع}}$$

اور یہ دفعہ ۳ کی معیاری شکلوں (آ)، (پ)، (ق) میں سے کسی ایک کے تحت آتا ہے۔

$$(۹) \dots\dots\dots = \frac{\text{فر لا}}{\text{ک (ا + ب) جب لا}} = \frac{\text{فر ع}}{\text{ک (ا + ب) ع + ع (ا - ب)}}$$

$$(۱۰) \dots\dots\dots = \frac{\text{فر لا}}{\text{ک (ا + ب) جب لا}} = \frac{\text{قط لا فر لا}}{\text{ک (ا + ب) مس لا}}$$

اور ہمیں مس لا = ع رکھتے ہیں

$$\dots\dots\dots = \frac{\text{فر ع}}{\text{ک (ا + ب) ع}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \frac{\text{فر (ب ع)}}{\text{فر (ب ع) + (ا - ب) ع}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \frac{\text{مس (ب ع)}}{\text{مس (ب ع) + (ا - ب) ع}}$$

$$(۱۱) \dots\dots\dots = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \frac{\text{مس (ب ع)}}{\text{مس (ب ع) + (ا - ب) ع}}$$

نائدی تفاعلوں والے متشابتیجے یہاں درج کئے جاتے ہیں۔

$$\text{ک مسنر لا فر لا} = \text{لوک جمنر لا} ، \text{ک مهنر لا فر لا} = \text{لوک جمنر لا} \dots (۱۲)$$

$$\text{ک جمنر لا فر لا} = \text{قطر لا} ، \text{ک جمنر لا فر لا} = \text{قمر لا} \dots (۱۳)$$

$$\text{ک جمنر لا فر لا} = \text{لوک مسنر لا} \dots (۱۴)$$

$$\text{ک جمنر لا فر لا} = ۲ ، \text{ک فر لا} = ۲ ، \text{ک فر لا} = ۲ ، \text{ک فر لا} = ۲ \dots (۱۵)$$

اسی طرح شکلوں ک اور ک فر لا اور ک فر لا کا مکمل ابدال  
مسنر لا = ۴ سے عمل میں آسکتا ہے۔

۹۔ شلتی ابدال۔ جبریتہ تفاعلوں کا مکمل جنہیں دو درجی جملوں کا جدر شامل ہوتا ہے اکثر اوقات متبوع متغیر کی بجائے شلتی یا زائدی تفاعل درج کر کے سے باسانی حاصل ہو جاتا ہے۔

مثلاً [۱]۔ [۲] کی موجودگی سے ابدال لا = ا جب ط یا لا = ا مسنر ۶  
پہن میں آتا ہے

نیز [۱]۔ [۲] کی موجودگی سے ابدال لا = ا قط ط یا لا = ا جمنر ۶

اور [۱]۔ [۲] کی موجودگی سے ابدال لا = ا مس ط یا لا = ا جمنر ۶ کی  
طرف توجہ جاتی ہے۔

مثال (۱)۔ مکملہ ک [۱]۔ [۲]۔ [۳] فر لا ..... (۱) کو دریافت کرو۔



جس سے  $\frac{فر}{فرلا} = ۶ - ۱$  و  $\frac{فر}{فرلا} = ۶ - ۱$  ..... (۲)

اس سے ذیل کا قاعدہ معلوم ہوتا ہے۔

اگر تکمل شدنی جملہ دو اجزاء کا حاصل ضرب ہو جس میں سے ایک  $(\frac{فر}{فرلا})$  فوراً تکمل ہو سکے تو اسے یہ فرض کر کے تکمل کیا جاسکتا ہے کہ دوسرا جزو  $(۶ - ۱)$  مستقل ہے بشرطیکہ تکمل شدہ جزو  $(۱)$  اور دوسرے جزو کے مشتق  $(\frac{فر}{فرلا})$  کے حاصل ضرب کے مکمل کو اس میں سے گھٹا دیا جائے۔

(۲) میں  $۱ = ۶ - ۱$  رکھنے سے ایک بہت مفید خاص شکل حاصل ہوتی ہے یعنی

$$\frac{فر}{فرلا} = ۶ - ۱ \quad (۳)$$

اس قاعدہ کے استعمال کی چند اہم مثالیں ذیل میں درج ہیں

$$(۱) \quad \frac{فر}{فرلا} = ۶ - ۱ \quad \text{لوگ لا} = ۶ - ۱ \quad \text{لوگ لا} = ۶ - ۱ \quad \text{لوگ لا} = ۶ - ۱$$

$$(۲) \quad \frac{فر}{فرلا} = ۶ - ۱ \quad \text{لوگ لا} = ۶ - ۱ \quad \text{لوگ لا} = ۶ - ۱$$

$$(۳) \quad \frac{فر}{فرلا} = ۶ - ۱ \quad \text{لوگ لا} = ۶ - ۱ \quad \text{لوگ لا} = ۶ - ۱$$

نتیجہ (۳) میں  $۶ = ۶ - ۱$  رکھنے سے

$$(۴) \quad \frac{فر}{فرلا} = ۶ - ۱ \quad \text{لوگ لا} = ۶ - ۱ \quad \text{لوگ لا} = ۶ - ۱$$

× اگر ہم  $\frac{فر}{فرلا}$  کی بجائے وکیس یعنی وکی بجائے عفا و تو اس کی شکل ہو جاتی ہے

عفا (۶) - عفا (۱) - عفا (۱) - عفا (۱) - عفا (۱) - عفا (۱) - عفا (۱) - عفا (۱)

$$\text{لیکن } [ا-ا-لا-لا-فرلا] = [ا-ا-لا-لا-فرلا] = [ا-ا-لا-لا-فرلا] = [ا-ا-لا-لا-فرلا]$$

$$(۶) \dots [ا-ا-لا-لا-فرلا] = [ا-ا-لا-لا-فرلا]$$

(۶) اور (۵) کے حامل جمع کو تقسیم کرنے سے حامل ہوتا ہے کہ

$$(۷) \dots [ا-ا-لا-لا-فرلا] = [ا-ا-لا-لا-فرلا] + [ا-ا-لا-لا-فرلا] + [ا-ا-لا-لا-فرلا]$$

دفعہ ۹۷ مثال (۱) کے ساتھ مقابلہ کرو۔

بالکل اسی طریقہ سے ہمیں حاصل ہونا چاہئے

$$(۸) \dots [ا-ا-لا-لا-فرلا] = [ا-ا-لا-لا-فرلا] + [ا-ا-لا-لا-فرلا] + [ا-ا-لا-لا-فرلا]$$

$$\text{اور } [ا-ا-لا-لا-فرلا] = [ا-ا-لا-لا-فرلا] + [ا-ا-لا-لا-فرلا] + [ا-ا-لا-لا-فرلا]$$

(۳) تکملوں پ = [ا-ا-لا-لا-فرلا] اور ق = [ا-ا-لا-لا-فرلا]

کی قیمتیں دریافت کرنا۔

(۲) میں ۷ = جم بیلا اور ۶ = [ا-ا-لا-لا-فرلا] رکھنے سے

$$\text{پ} = [ا-ا-لا-لا-فرلا] = [ا-ا-لا-لا-فرلا] + [ا-ا-لا-لا-فرلا]$$

$$(۱۱) \dots [ا-ا-لا-لا-فرلا] = [ا-ا-لا-لا-فرلا] + [ا-ا-لا-لا-فرلا]$$

$$\text{اسی طرح ق} = [ا-ا-لا-لا-فرلا] = [ا-ا-لا-لا-فرلا] + [ا-ا-لا-لا-فرلا]$$

$$(۱۲) \dots [ا-ا-لا-لا-فرلا] = [ا-ا-لا-لا-فرلا] + [ا-ا-لا-لا-فرلا]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{پس صا پ - بی ق} = [ا-ا-لا-لا-فرلا] \\ \text{بی پ + صا ق} = [ا-ا-لا-لا-فرلا] \end{array} \right.$$







پرخسروہوگی۔

ون =  $\int \sin^2 x \, dx$  ..... (۱۴)

تو ثابت ہو سکتا ہے کہ  $\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha-\beta}$  ..... (۱۵)

۴۴۔ تحفہ خفا بطے (مسلسل)۔

(۱۱) فزونی که عن = جمن طه فرطه

تو عن = اچھم - اٹھا فر (جب طہ) = جب طہ اچھم طہ

- [جب ط<sup>۱</sup> x (ن-ا) جم<sup>۲</sup> ط<sup>۲</sup> x (ج-ب) ط<sup>۳</sup>]

= جب ط<sup>ن</sup> + ط<sup>ن-۱</sup> (۱-ن) (۱-ج<sup>ن</sup> ط<sup>ن</sup>) ج<sup>ن-۲</sup> ط<sup>ن</sup> فرط

٤ ن = جب ط م ج م ط م + (ن - ا) (ع - م - ع - ن)

دوسری طرف لیجا کر ان پر تقسیم کرنے سے

$$ع_n = \frac{1}{n} \text{ جب } ط_1, ط_2, \dots, ط_n = \frac{1-n}{n} \text{ ..... } (2)$$

اس ضابطہ کو متواتر استعمال کرنے سے ہر قدم پر قوت بقدر ۲ کے کم ہو جاتی ہے، اور آخر الامر اگر ن شبت صحیح عدد ہو تو حلقہ عن فی قیمت یا تو

۶ = ∫ حجم قطب قطب = جب قطب ..... (۳)

پرمخصوصہ کیجا سکتی ہے بوجب اسکے ک ن طاق یا جفت ہو۔

(۲) اسی طریقہ پر اگر  $\cos = \text{رجب طہ فطرہ} \dots\dots\dots (۵)$

تو فرس =  $\frac{1}{n}$  جم طماجب<sup>n</sup> +  $\frac{n-1}{n}$  و ... (۶)

پس اگر نشت صبح عدد ہوتو وہ کی قیمت

$$و = \text{جب } ط \text{ فرط } ط = \text{جم } ط \dots\dots\dots (۷)$$

$$یا و = \text{جم } ط \text{ فرط } ط = \text{ط} \dots\dots\dots (۸)$$

پر لا کے منحصر کی جا سکتی ہے۔

$$(۳) \text{ یہی طریقہ عام شکل عم } = \text{جب } ط \text{ جم } ط \text{ فرط } ط \dots\dots\dots (۹)$$

کے لئے استعمال ہو سکتا ہے۔

$$\text{اب عم } = \text{جب } ط \text{ جم } ط - ط \text{ فرط } ط$$

$$= \frac{1}{م+۱} \text{ جب } ط \text{ جم } ط - ط = \frac{1}{م+۱} \text{ جب } ط \text{ فرط } ط - ط \text{ جم } ط \text{ فرط } ط$$

$$= \frac{1}{م+۱} \text{ جب } ط \text{ جم } ط - ط + \frac{(۱-ن)}{(۱+م)} \text{ جب } ط \text{ جم } ط - ط \text{ فرط } ط$$

$$= \frac{1}{م+۱} \text{ جب } ط \text{ جم } ط - ط + \frac{۱-ن}{م+۱} (عم - ن)$$

کسر دور کرنے اور یک جنس رقموں کو اکٹھا کر کے (م+ن) سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{عم} = \frac{1}{م+ن} \text{ جب } ط \text{ جم } ط - ط + \frac{۱-ن}{م+ن} \text{ عم} - ن \dots\dots\dots (۱۰)$$

اسی طریقہ سے حاصل ہوگا

$$\text{عم} = \frac{1}{م+ن} \text{ جب } ط \text{ جم } ط - ط + \frac{۱-م}{م+ن} \text{ عم} - م \dots\dots\dots (۱۱)$$

ضابطوں (۱۰) اور (۱۱) کے متواتر استعمال سے ہر قدم پر کوئی قوت نا بقدر ۲ کے گھٹا یا جا سکتا ہے اور بالآخر اگر م اور ن مثبت صحیح عدد ہوں تو کچھ عم کے قیمت ذیل کے چار شکلات میں سے کسی ایک پر منحصر کیا جا سکتی ہے۔

$$ع = \text{جب } ط \text{ جم } ط \text{ فرط } ط = \frac{1}{۱} \text{ جب } ط \dots\dots\dots (۱۲)$$

٤ =  $\int$  فط = ط ..... (١٣)

عبر = حجم قطب فسطح = جب قطب ..... (۱۳)

ع = واجب طه نقطه = - جم طه ..... (۱۵)

ان دفعات کی تحقیقات کی بڑی اہمیت یہ ہے کہ انکی مدد سے محدود تکملات میں

کے چند سادہ اور علمی طور پر نہایت مفید ضابطے حاصل ہو سکتے ہیں۔ دیکھئے دفعہ ۴۔



یعنی  $\frac{فا(عہا)}{ف(عہا)} = \frac{فا(عہا)}{ف(عہا)}$ ، .....،  $\frac{فا(عہن)}{ف(عہن)} = \frac{فا(عہن)}{ف(عہن)}$ ..... (۷)

اب چونکہ (ن-۱) درجہ کے منطق صحیح تفاعل لا کی (ن-۱) سے زیادہ جدا گانہ قیمتوں کے لئے مساوی نہیں ہو سکتے سوائے اس صورت کے جبکہ وہ متماثل مساوی ہوں، اس لئے ثابت ہوا کہ مستقلوں کی ان قیمتوں کے لئے (۵) مساوات متماثلہ ہے۔ پس

$$\frac{فا(لا)}{ف(لا)} = \frac{لا(لا)}{ف(لا)} = \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \dots + \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \frac{لا(لا)}{ف(لا)} \quad (۸)$$

مثال (۱)  $\frac{لا(لا)}{ف(لا)} = \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \dots + \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \frac{لا(لا)}{ف(لا)}$  کی قیمت دریافت کرو۔

$$اب \quad \frac{لا(لا)}{ف(لا)} = \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \dots + \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \frac{لا(لا)}{ف(لا)}$$

$$(۱۰) \dots = \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \dots$$

اگر کسور صاف کی جائیں اور سروں کو مساوی رکھا جائے تو 'ج' کی قیمت دریافت کرنے کے لئے چار خطی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔ لیکن اوپر کا طریقہ استعمال کرنا آسان تر ہے۔ اگر فرض کی ہوئی متماثلہ کو (لا-۱) سے ضرب دیا جائے اور پھر اس میں لا = ۱ رکھ دیا جائے تو اس کی قیمت دریافت ہو جاتی ہے اور اسی طرح باقی سروں کے لئے۔

$$پس \quad \frac{لا(لا)}{ف(لا)} = \frac{لا(لا)}{ف(لا)} - \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \frac{لا(لا)}{ف(لا)} - \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \dots + \frac{لا(لا)}{ف(لا)} - \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \frac{لا(لا)}{ف(لا)} - \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \dots$$

اس نتیجہ کی بآسانی تصدیق ہو سکتی ہے۔

$$اس لئے رجحان مکمل = \frac{لا(لا)}{ف(لا)} - \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \frac{لا(لا)}{ف(لا)} - \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \dots + \frac{لا(لا)}{ف(لا)} - \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \frac{لا(لا)}{ف(لا)} - \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \dots$$

$$(۱۲) \dots + \frac{لا(لا)}{ف(لا)} - \frac{لا(لا)}{ف(لا)} + \dots$$





اگر ضربیں کو (۱-۱) سے ضرب دیں اور پھر لا = ۱ رکھ دیں تو حاصل ہوتا ہے ج = ۱  
نیز لا سے ضرب دیکر لا = ۰ رکھنے سے ج = ۱ دریافت ہوتا ہے۔ اب صرف  
ا کی قیمت کسی اور طریقہ سے دریافت کرنا باقی ہے۔ اگر مساوات (۴) کے دونوں  
جانب لا سے ضرب دیں اور لا = ۰ کر دیں تو حاصل ہوتا ہے ا = ج = ۰ یعنی  
ا = ۱ اس کے معادل طریقہ یہ ہے کہ کسر صاف کرنے کے بعد لا کے سروں کو مساوی  
رکھا جائے۔ نیز لا کو کوئی خاص قیمت دے سکتے ہیں مثلاً لا = ۱ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$- (ا + ج) = \frac{1}{4} \quad ج = \frac{1}{4}$$

اور پہلے نتیجوں کی مدد سے ا = ۱ حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{پس} \quad \int \frac{فرلا}{(لا-۱)(لا)} = \int \left( \frac{1}{لا-۱} + \frac{1}{لا} \right) فرلا$$

$$= \text{لوگ لا} - \frac{1}{لا} - \text{لوگ (لا-۱)} \dots\dots\dots (۵)$$

مثال (۲)۔  $\int \frac{۱+لا^۲}{(۳-لا)(۲+لا)}$  ..... (۶) کی قیمت دریافت کرو۔  
فرض کرو کہ

$$\frac{۱+لا^۲}{(۳-لا)(۲+لا)} = \frac{ج}{(۳-لا)} + \frac{ب}{۲+لا} + \frac{ا}{لا} \dots\dots\dots (۷)$$

مستقلوں کے دریافت کرنے کے اجمالی طریقہ سے

$$\frac{۱+۲}{۲+۳} = ج = \frac{۳}{۲۵} \quad \frac{۱+۳}{۳-۲۰} = ا = \frac{۳}{۲۵}$$

نیز لا سے ضرب دیکر لا = ۰ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ا + ب = ۰ \quad \text{یعنی} \quad ج = \frac{۳}{۲۵}$$

اور اگلے ٹکڑے =  $\frac{۳}{۲۵} \text{ لوگ (لا+۲)} + \frac{۲}{۲۵} \text{ لوگ (لا-۳)} - \frac{۴}{(۳-لا)۲۵} \dots\dots\dots (۸)$

مثال (۳)۔  $\int \frac{لا^۲ فرلا}{(۱+لا)}$  ..... (۹) کی قیمت دریافت کرو۔

دفعہ ۷۷ (۳) کی یاد دہانی کی جاتی ہے کہ  $\frac{لا}{(لا+۱)}$  کو لا کا تفاعل بالکرمض معائنہ سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{1}{(لا+۱)} - \frac{1}{(لا+۲)} = \frac{1 - (لا+۱)}{(لا+۱)(لا+۲)} = \frac{لا}{(لا+۱)(لا+۲)}$$

پس  $\frac{لا}{(لا+۱)(لا+۲)} = \frac{لا}{(لا+۱)} - \frac{لا}{(لا+۲)}$  لوگ  $\frac{1}{۲} = \frac{لا}{(لا+۱)(لا+۲)}$  کو  $\frac{1}{۲} + \frac{1}{(لا+۱)(لا+۲)}$

(۱۰).....

۸۵۔ دو درجی اجزائے ضربی نہ مذکور بالا طریقہ ہمیشہ استعمال ہو سکتے ہیں لیکن اگر ف (لا) کی کچھ اصلین خیالی ہوں تو اول تسکملہ خیالی شکل میں حاصل ہو گا۔ اگر ہم خیالی جلوں پر غور کرنے سے پتہ چلتا ہے کہ تو ذیل کے طریقے پر عمل کرنا چاہئے۔  
ساداتوں کے نظریہ سے ہمیں معلوم ہے کہ کثیر الارقام ف (لا) جسکے تمام حقیقی ہوں پہلے اور دوسرے درجے کے حقیقی اجزاء میں تحویل ہو سکتا ہے۔ پس

تفاعل  $\frac{ف(لا)}{ف(لا)}$  (۱).....

کو جزوی کسو میں تحویل کرنے کی ضمن میں ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

(۱) ہر خطی جزو لا۔ بھا کے لئے جو تکرار نہیں پاتا کسی شکل  $\frac{۱}{لا-بھا}$  (۲).....

(ب) ہر خطی جزو لا۔ بھا کے لئے جو درجہ تکرار پاتا ہے کہ کسو کا سلسلہ ذیل کی شکل کا ہے

(۳).....  $\frac{بھا}{لا-بھا} + \frac{بھا}{(لا-بھا)^۲} + \frac{بھا}{(لا-بھا)^۳} + \dots$

(ج) ہر دو درجی جزو لا۔ بھا + پ (لا + ق) کے لئے جو تکرار نہیں پاتا کسی شکل ہے

(۴).....  $\frac{ج(لا+د)}{پ(لا+ق)}$

(۵) اور دو درجی جزو لا + پ لاتی کیلئے جو درجہ تکرار پاتا ہے کسور کا سلسلہ ذیل کی شکل کا ہے

$$(۵) \dots \frac{\text{ج} + \text{لا} + \text{در}}{(\text{لا} + \text{پ} + \text{ق})} + \dots + \frac{\text{ج} + \text{لا} + \text{د}}{(\text{لا} + \text{پ} + \text{ق})} + \dots + \frac{\text{ج} + \text{لا} + \text{در}}{(\text{لا} + \text{پ} + \text{ق})}$$

یہ رقم نما آسان ہے کہ اس طور پر تفصیلات کی عمر کافی تعداد حاصل ہوتی ہے تاکہ سلسلے کے باجمہ ساری کہنے کے طریقہ سے تفاعل (۱) کی جزوی کسور کے پورے نظام (۵) کے ساتھ مطابقت قائم ہو سکے۔

$$(۶) \dots \frac{\text{ج} + \text{لا} + \text{دس}}{(\text{لا} + \text{پ} + \text{ق})} \text{ جس } \dots$$

کا نامحدود کلمہ کس طرح دریافت کیا جائے۔ جس = اکی صورت پر دفعہ ۷۴ میں غور کیا جا چکا ہے اور عام صورتاً ایک تجویلی ضابطہ کی مدد سے اس شکل میں تحویل کیجا سکتی ہے۔ سب سے پہلے لہ اور مہ ایسے دریافت کئے جاسکتے ہیں کہ

$$(۷) \dots \frac{\text{ج} + \text{لا} + \text{دس}}{(\text{لا} + \text{پ} + \text{ق})} = \text{لہ} + \frac{۲ + \text{لا} + \text{پ}}{(\text{لا} + \text{پ} + \text{ق})} + \frac{\text{مہ}}{(\text{لا} + \text{پ} + \text{ق})} \dots$$

یعنی لہ =  $\frac{۱}{۴}$  جس اور مہ =  $\frac{۱}{۴}$  جس -  $\frac{۱}{۴}$  جس (۸) نتیجہ (۷) کے دائیں جانب کی پہلی رقم کا کلمہ ہے

$$(۹) \dots \frac{\text{لہ}}{۱} \times \frac{۱}{(\text{س} - ۱)} \times \frac{۱}{(\text{لا} + \text{پ} + \text{ق})} \dots$$

اور اب صرف ذیل کی قیمت معلوم کرنا باقی ہے

$$(۱۰) \dots \frac{\text{فر لا}}{(\text{لا} + \text{پ} + \text{ق})} \text{ یا } \frac{\text{فر ت}}{(\text{د} + \text{ج} + \text{س})}$$

ذیل کی بحث صرف ضمنیوں کو مکمل کرنے کی غرض سے یہاں دی گئی ہے، عملی طور پر اسے استعمال کی شان و نادر ضرورت پڑتی ہے۔ اس کو متوی رکھنے سے طالب علم کو کوئی نقصان نہیں ہوگا۔ (۱۱) کے نمونے کے جملوں کو مکمل کرنے کا دو سر طریقہ مثال (۱۲) میں آگے دیا گیا ہے۔

جبکہ ت = لا +  $\frac{۱}{۲}$  پ اور ج = ق -  $\frac{۱}{۲}$  پ ..... (۱۱)

تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{فرت} \left\{ \frac{ت}{(ت + ج)س - ۱} - \frac{۱}{(ت + ج)س - ۱} \right\} = \frac{ت}{(ت + ج)س}$$

$$= \frac{۱}{(ت + ج)س - ۱} - \frac{۱}{(ت + ج)س} = \frac{ج}{(ت + ج)س}$$

$$= \frac{(۳ - س۲) - (۲ - س۲) \times ج}{(ت + ج)س} \dots\dots (۱۲)$$

پس تکمل کرنے سے

$$\frac{ت}{(ت + ج)س - ۱} = \frac{فرت}{(ت + ج)س} + \frac{فرت}{(ت + ج)س - ۱}$$

$$\text{یعنی} \left\{ \frac{فرت}{(ت + ج)س} \right\} = \frac{۱}{(ت + ج)س} \times ج + \frac{ت}{(ت + ج)س - ۱} + \frac{فرت}{(ت + ج)س - ۱}$$

..... (۱۳)

اس لئے پہلی ترقیم پر واپس آنے سے

$$\left\{ \frac{فرت}{(ت + ج)س - ۱} \right\} = \frac{۱}{(ق - \frac{۱}{۲} پ)س - ۱} \times \left( \frac{لا + \frac{۱}{۲} پ}{(ق - \frac{۱}{۲} پ)س - ۱} \right)$$

$$+ \frac{(۳ - س۲)}{(ق - \frac{۱}{۲} پ)س - ۱} \dots\dots (۱۴)$$

ادریبی مطلوبہ تجویلی ضابطہ ہے۔ اس نتیجے کے متواتر اشغال سے نمک (۱۰) کی قیمت آؤں

$$\left\{ \frac{فرت}{(ت + ج)س - ۱} \right\} \dots\dots (۱۵)$$

پر لا کے منہص کی جا سکتی ہے اور اس نمک (۱۵) کی قیمت دفعہ ۵ سے معلوم ہے۔

مثال (۱)  $\left\{ \frac{فرت}{(ت + ج)س - ۱} \right\} \dots\dots (۱۶)$  کی قیمت دریافت کرو۔



$$\int \frac{فرلا}{(۱+لا)^۲} = \int جم^۲ طه فرطه = \int (۱+جم^۲ طه) فرطه$$

$$= \frac{۱}{۲} طه + \frac{۱}{۲} جب ر طه = \frac{۱}{۲} س لا + \frac{۱}{۲} \times \frac{لا}{(۱+لا)^۲} \dots\dots\dots (۲۱)$$

۸۶۔ غیر منطبق تفاعلوں کا مکمل :- اس بارے میں ذیل کے نتیجے اہم ہیں

(آ) جب تفاعلوں کی صورت میں جنہیں متغیر کی کسری قوتوں کے سوائے اور کوئی غیر منطبق مقدار نہیں ہے ہم

$$لا = ت^۲ \text{ اور } \frac{فرلا}{فرت} = م. ت^۲ - ۱ \dots\dots\dots (۱)$$

رکھ سکتے ہیں جہاں کسری قوت ناؤں کے نسب نامہ کا زواضعاف اقل م ہے اور سوال اس طور پر ت کے منطبق تفاعل کے مکمل میں بدل جاتا ہے۔

$$۹۰. (۲) لا اور لا کا کوئی منطبق تفاعل جہاں لا = لا + ب لا \dots\dots\dots (۲)$$

ابداً لا + ب لا = ت^۲ اور  $\frac{فرلا}{فرت} = \frac{ت^۲}{ب}$  .... (۳) کے ذریعہ مکمل ہو سکتا ہے۔

$$\text{پس } \int فا (لا) (۲) فرلا = \int فا \left( \frac{ت^۲}{ب} - ۱ \right) \frac{فرت}{ب} \dots\dots\dots (۳)$$

اور مکمل کی علامت کے اندر کات کا تفاعل منطبق ہے۔

$$\text{مثال (۱) } \int \frac{لا فرلا}{(۱+لا)^۲} \text{ کی قیمت دریافت کرو۔}$$

اگر لا = ت^۲ رکھیں تو

$$\int \frac{لا فرلا}{(۱+لا)^۲} = \int \frac{ت^۲ فرت}{(۱+ت^۲)^۲} = \int ت^۲ (ت^۲ - ۱ + ۱) فرت = \int ت^۲ فرت - \int ت^۲ فرت + \int فرت$$

$$= \frac{۱}{۲} ت^۲ - ت + ۱ - \frac{۲}{۳} ت^۳ + لا + ۱ - ۲ لوک (۱+لا) \dots\dots\dots$$

مثال (۲)  $\int \frac{\text{فرلا}}{(۲+۲)۱۱+۱۱} \int$  کی قیمت دریافت کرو۔

$$۱+۲ = ۲ \text{ اور } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = ۲ \text{ ت رکھنے سے}$$

$$\text{تکملہ} = \int \frac{۲ \text{ فرت}}{(۱+۲)۱۱} = ۲ \int \frac{\text{فرت}}{۱+۲} = ۲ \text{ مسرات} = ۲ \text{ سرات} ۱۱+۱۱$$

(۳) اگر لا دور جی جے کے جذر کو ظاہر کرے تو فرض کرو کہ

$$۴ = ۱۱ \text{ اور } ۲ = ۱۱ \text{ ب لا ج}$$

اور فا (لا، لا) متغیرات لا اور لا کا منطوق تفاعل ہے تو تکملہ فار (لا، لا) فرلا کی قیمت دریافت کرنے کا سوال ذیل کے ابدال سے منطوق تفاعل کے تکملہ میں تحویل ہو سکتا ہے۔

$$\text{اگر مثبت ہے تو ہم لکھ سکتے ہیں } ۴ = ۱۱ \times ۱۱ \text{ اور } ۲ = ۱۱ \text{ پ لا ق} \dots (۶)$$

جس میں پ =  $\frac{۱۱}{۲}$  اور ق =  $\frac{۲}{۱۱}$  - اب فرض کرو کہ

$$۱۱ \text{ اور } ۲ = ۱۱ \text{ پ لا ق} = ۱۱ - ۲$$

$$\text{پس لا} = \frac{۲ - ۱۱ \text{ ق}}{۲ + ۱۱ \text{ پ}} \text{ اور } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \frac{۲ (۲ + ۱۱ \text{ پ} + ۱۱ \text{ ق})}{۲ (۲ + ۱۱ \text{ پ})} \dots (۷)$$

$$\text{اور } ۱۱ \text{ اور } ۲ = ۱۱ \text{ پ لا ق} = \frac{۲ + ۱۱ \text{ پ} + ۱۱ \text{ ق}}{۲ + ۱۱ \text{ پ}} \dots (۸)$$

اس ابدال سے ظاہر ہے کہ سوال ت کے منطوق تفاعل کے تکمیل میں تحویل ہو جاتا ہے۔

اگر لا، پ لا، ق کے اجزاء حقیقی ہیں تو فرض کرو

$$۱۱ \text{ اور } ۲ = ۱۱ \text{ پ لا ق} = (۱۱ - ۲) (۱۱ - ۲) \dots (۹)$$

تو ذیل کا ابدال بھی استعمال کر سکتے ہیں

$$۱۱ - ۲ = (۱۱ - ۲) (۱۱ - ۲) \dots (۱۰)$$

جس سے  $(لا = عا + عا - عا)$  اور  $\frac{ع - عا}{(ا - ت)^2} = \frac{ع - عا}{(ا - ت)^2}$  ..... (۱۱)

اور  $\sqrt{لا + پ + ق}$

(۱۲) .....  $\frac{(ع - عا + عا)}{(ا - ت)^2} = (لا - عا) ت =$

اگر منفی ہے تو ہم لکھ سکتے ہیں

(۱۳) .....  $لا = \sqrt{ا - ق + پ - لا} - لا$

جہیں  $پ = ع - عا$  اور  $ق = ع - عا$  اگر غیر حقیقی ہے تو لازماً  $ق + پ - لا$  کے اجزاء ضربی حقیقی ہونے چاہئیں۔ ورنہ اسکی خلاف صورت میں  $لا$  کی تمام قیمتوں کے لئے اس جملہ کی علامت ایک ہی رہے گی اور ظاہر ہے کہ  $لا$  کی کافی طور پر بڑی قیمتوں کے لئے یہ جملہ منفی ہے اس لئے اسکی قیمت ہمیشہ منفی ہوگی۔ پس  $ق + پ - لا = (ع - عا) (ع - عا) - لا$  ..... (۱۴)

جس میں  $ع$  اور  $ع - عا$  حقیقی ہیں۔ فرض کر دو

(۱۵) .....  $لا = (ع - عا) ت$

تو  $لا = عا + عا - عا$  اور  $\frac{ع - عا}{(ا - ت)^2} = \frac{ع - عا}{(ا - ت)^2}$  ..... (۱۶)

اور  $\sqrt{ق + پ - لا} = (لا - عا) ت = \frac{(ع - عا) ت}{(ا - ت)^2}$  ..... (۱۷)

اب ظاہر ہے کہ ان ابدالوں سے  $لا$ ،  $ع$ ،  $ع - عا$ ،  $ق$ ،  $پ$ ،  $ع - عا$  متغیرات کا متعلق تفاعل ہو جاتا ہے۔ اور کی تحقیقات ایک جتنا ہی اہمیت رکھتی ہے کیونکہ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ خاص شکل کے تفاعل تکمیل ہو سکتے ہیں اور ان سے خاص قسم کے نتیجے حاصل ہوتے ہیں لیکن خاص خاص صورتوں میں عملی طور پر عمل دیگر طریقوں سے آسانی سے عمل میں آسکتا ہے\*۔

[\* دفعہ ۷۶، ۷۷، ۷۸ اور ۷۹ کے طریقے خاص طور پر دیکھو]



اس باب کے دوران میں ایسی کئی مثالیں آچکی ہیں۔ اور نمونے کے طور پر ایک اور دو مثالیں یہاں دی جاتی ہیں۔  
مثال (۳)۔ نسب ناکر ناطق بنانے سے

$$\int \frac{فرلا}{لا+لا+لا} = \int \{ لا+لا-لا \} فرلا$$

$$= \frac{۲}{۳} (لا+۱) - \frac{۲}{۳} لا$$

مثال (۴)۔  $\int \frac{فرلا}{لا+لا-لا} = \int \{ لا-لا-لا \} فرلا$

$$= \frac{۱}{۴} لا - \int لا-لا-لا فرلا$$

$$= \frac{۱}{۴} لا - \frac{۱}{۴} لا-لا-لا + \frac{۱}{۴} جمن-لا$$

بطور دیگر لا = جمن ع رکھنے سے مکملہ ذیل کی شکل اختیار کرتا ہے

$$\int \frac{جمن ع فر ع}{جمن ع + جمن ع} = \int قو جمن ع فر ع$$

$$= \frac{۱}{۴} \int (۱-قو) فر ع = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} قو$$

اور آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ دونوں نتیجوں میں صرف متعلق کا فرق ہے۔

### امثلہ ۲۳

ذیل کے جملوں کے نامحدود کمالات دریافت کرو اور تفریق کر کے انکی تصدیق کرو۔

$$(۲) \quad \frac{۱}{(۱-لا)۲} , \frac{۱}{۱-لا۲}$$

$$(۳) \quad \frac{۱}{لا} , \frac{۱}{لا} , \frac{۱}{لا}$$

$$(۱) \quad \frac{۱}{لا-۱} , \frac{۱}{(لا-۱)۲}$$

$$(۳) \quad \frac{۱}{(لا-۱)۲} , \frac{۱}{(لا-۱)۲}$$

$$\frac{n+1}{2n}, \frac{n+1}{n} \quad (۶)$$

$$\frac{1}{n^2-2n}, \frac{1}{n+2n} \quad (۵)$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \quad (۸)$$

$$\frac{n+2}{n-2}, \frac{n-1}{n+2} \quad (۷)$$

$$\frac{n^2}{n-1}, \frac{n^2}{n+1} \quad (۱۰)$$

$$\frac{n-1}{n+1}, \frac{n+1}{n-1} \quad (۹)$$

$$\frac{n^2}{n}, \frac{n^2}{n} \quad (۱۲)$$

$$\frac{n+1}{n-1}, \frac{n-1}{n+1} \quad (۱۱)$$

$$\frac{n^2}{n}, \frac{n^2}{n} \quad (۱۳)$$

$$\frac{n^2}{n}, \frac{n^2}{n} \quad (۱۴)$$

$$\frac{n^2}{n+1}, \frac{n^2}{n-1} \quad (۱۶)$$

$$\frac{n^2}{n+1}, \frac{n^2}{n-1} \quad (۱۵)$$

### امش ۲

### حرکیاتی سوالات

(۱) ایک ذرہ قانون  $\frac{dx}{dt} = 2x - 3$  کے مطابق حرکت کر رہا ہے۔ ثابت

کر دو کہ ساکن ہونے سے پہلے وہ فاصلہ  $\frac{2}{3}$  طے کریگا۔ (ج اسراع بجا فہاض)

(۲) اگر ایک نقطہ سکون سے وقت  $t = 0$  پر مستقل اسراع کے ساتھ حرکت شروع کرے اور کسی وقفہ کے بعد اسکی رفتار  $v$  ہو اور اس وقفہ کے اندر اوسط رفتار  $\bar{v}$  ہو تو

ثابت کر دو کہ  $\bar{v} = \frac{v}{2}$  کی ترقیم میں اگر اسراع  $a$  کے متناسب ہو تو

$$\bar{v} = \frac{v}{2} \times \frac{1}{n}$$

(۳) ایک ذرہ کی حرکت کا قانون  $\frac{dx}{dt} = 2x - 3$  ہے۔ ثابت کر دو کہ

ث۔ جسے ساکن ہونے تک فاصلہ  $\frac{9}{16}$  ملے ہوگا۔

(۵) اگر مزاحم واسطہ میں متحرک ذرہ کی رفتار  $\frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} = \text{وقت}$  ہو تو ثابت کر کے دو وقت کے مقام سے فاصلہ  $\frac{\text{فرس}}{\text{وقت}}$  کبھی طے نہیں کر سکتا۔

(۶) ایک ذرہ قانون  $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{وجہ}$  جم ن ت کے مطابق حرکت کرتا ہے۔  
 ثابت کرو کہ ت = . سے ساکن ہونے تک فہ فاصلہ  $\frac{\text{ن} + \text{ک}}{\text{ن} + \text{ک}}$  و طے کرتا ہے۔

(۶) ثابت محور کے گرد گھومنے والے جسم کی زاویہ رفتار  $\frac{\text{فرٹ}}{\text{فٹ}} = \frac{\text{فرٹ}}{\text{فٹ}} = \frac{\text{فرٹ}}{\text{فٹ}} = \frac{\text{فرٹ}}{\text{فٹ}}$  ثابت کر دو کہ اگر  $\text{فرٹ} = 0$  تو  $\text{فرٹ} = 0$ ۔

اسلام

(درجہ دوم کے نسب نامہ)

$$(1) \int \frac{y+1}{y^2+1} dy = \text{مسـالا} + \text{لوگ} \sqrt{y^2+1}$$

$$\int \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{f(x)}{x^n} - \frac{1}{n} \int \frac{f'(x)}{x^n} \quad (2)$$

$$(3) \int \frac{x^2}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln |x+1| + C$$

$$(1 - \lambda_2) = \frac{f_{\lambda_2}}{N\lambda_2 + \lambda_2 - 1} \int \quad (3)$$

$$(5) \int \frac{1+y^2}{1+y} = \frac{y^2}{y^2+y+1} \text{ لوک}$$

$$(۶) \int \frac{۳+۲۱}{۵+۲۱-۲۱} فرلا = \frac{۳}{۲۱} لوک (۵+۲۱-۲۱) + \frac{۳۴}{۳۱۲} مس \frac{۳-۲۱}{۳۱۲}$$

$$(۷) \int \frac{۱-۲}{۳+۲۱+۲۱} فرلا = لوک (۳+۲۱+۲۱) - \frac{۳}{۲۱} مس \frac{۱+۲}{۲۱}$$

$$(۸) \int \frac{۱+۲+۲}{۱+۲-۲} فرلا = لوک (۱+۲-۲) + \frac{۲}{۳۱} مس \frac{۱-۲}{۳۱}$$

$$(۹) \int \frac{۱+۲}{۲(۱-۲)} فرلا = لوک (۱-۲) - \frac{۲}{۱-۲}$$

$$(۱۰) \int \frac{لا فرلا}{۸+۲+۲+۲} = لوک \frac{۲(۴+۲)}{۲+۲}$$

$$(۱۱) \int \frac{۱-۲}{(۲-۲)(۳-۲)} فرلا = لا - ۲ لوک (۲-۲) + ۸ لوک (۳-۲)$$

$$(۱۲) \int \frac{۱+۲+۲}{۱-۲-۲} فرلا = لا + \frac{۳}{۵} لوک (۱+۵-۲) - \frac{۲}{۵} لوک (۱-۵-۲) + \frac{۲}{۵} لوک (۱-۵+۲)$$

$$(۱۳) \int \frac{۱-۲-۲}{۲-۲-۱} فرلا = لا + \frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۵} + \dots + \frac{۱}{۱-۲} \times \frac{۱-۲}{۱-۲}$$

$$(۱۴) \int \frac{۱-۲-۲}{۲-۲+۱} فرلا = لا - \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۵} - \dots + \frac{۱}{۱-۲} \times \frac{۱-۲}{۱-۲}$$

امشله ۲۶

$$(۱) \int \frac{فرلا}{۳-۲۱} = \frac{۱}{۳۱} جب \frac{۱}{۲} لا$$

$$(۲) \int \frac{فرلا}{۳+۲۱} = \frac{۱}{۳۱} جب \frac{۱}{۲} لا$$

$$(۳) \int \frac{فرلا}{۱-۲} = جب \frac{۱}{۲} (۱-۲)$$

$$(۴) \int \frac{فرلا}{(۱+لا)لا(۱+لا۲)} = جنز۱ (۱+لا۲)$$

$$(۵) \int \frac{فرلا}{(۱-لا)لا(۱-لا۲)} = جنز۱ (۱-لا۲)$$

$$(۶) \int \frac{فرلا}{(۱+لا۲+لا۳+لا۲)لا} = \frac{۱}{۳لا} جنز۱ \frac{۱+لا۳}{۲لا}$$

$$(۷) \int \frac{فرلا}{(۱-لا۳-لا۲+لا)لا} = \frac{۱}{۳لا} جنز۱ \frac{۱-لا۳}{۲لا}$$

$$(۸) \int \frac{فرلا}{(لا۲-لا-لا۲)لا} = جنز۱ (۱- \frac{لا}{۲})$$

$$(۹) \int \frac{فرلا}{لا} = \frac{۱-لا}{لا} = \frac{۱}{لا} - ۱ = جنز۱ \frac{۱-لا۲}{۲لا} + \frac{۱}{۲لا} جنز۱ \frac{۱-لا۲}{لا}$$

$$(۱۰) \int \frac{فرلا}{لا} = جنز۱ \frac{لا+۱}{لا-۱} = جنز۱ \frac{لا-۱}{لا-۱} + جنز۱ \frac{۱}{لا-۱}$$

$$(۱۱) \int \frac{فرلا}{لا-۱} = جنز۱ \frac{لا+۱}{لا-۱} = جنز۱ \frac{لا-۱}{لا-۱} + جنز۱ \frac{۱}{لا-۱}$$

امثلہ ۲

تغییر کی تبدیلی

$$(۱) \int \frac{لا^۲ فرلا}{لا-۱} = \frac{۱}{۳لا} لوک \left( \frac{۱}{لا-۱} \right) (۱-لا)$$

$$(۲) \int \frac{لا^۲ فرلا}{لا-۱} = \frac{۱}{۴لا} لوک \frac{لا+۱}{لا-۱} = \frac{۱}{۴لا} لوک \frac{لا+۱}{لا-۱} = \frac{۱}{۴لا} لوک \frac{لا+۱}{لا-۱} = \frac{۱}{۴لا} لوک \frac{لا+۱}{لا-۱}$$

$$(۳) \int \frac{لوک لا فرلا}{لا} = \frac{۱}{۲لا} لوک لا$$

$$(۴) \quad \text{ک} \text{ جب لا جم لا فر لا} = \frac{۱}{۲} \text{ جب لا}$$

$$(۵) \quad \text{ک} \text{ جب لا} = \frac{\text{ک} \text{ جب لا}}{۱ - \frac{۱}{۲}} \text{ فر لا} = \frac{۱}{۲} \text{ (جب لا)}$$

$$(۶) \quad \text{ک} \text{ جم لا} = \frac{\text{ک} \text{ جم لا}}{۱ - \frac{۱}{۲}} \text{ فر لا} = \text{لوک (ا+جب لا)}$$

$$\text{ک} \text{ جب لا فر لا} = \frac{۱}{۲} \text{ لوک (ا+ب+جم لا)}$$

$$(۷) \quad \text{ک} \text{ جب لا جم لا فر لا} = \frac{۱}{۳} \text{ جم لا}$$

$$(۸) \quad \text{ک} \text{ جب لا جم لا} = \frac{\text{ک} \text{ جب لا جم لا}}{۱ - \frac{۱}{۳}} \text{ فر لا} = \frac{۱}{۳} \text{ لوک (ا+ب+جم لا)}$$

$$(۹) \quad \text{ک} \text{ مس لا فر لا} = \frac{۱}{۲} \text{ مس لا + لوک جم لا}$$

$$(۱۰) \quad \text{ک} \text{ جب لا} = \frac{\text{ک} \text{ جب لا}}{۱ - \frac{۱}{۳}} \text{ فر لا} = \frac{۱}{۳} \text{ قط لا}$$

$$(۱۱) \quad \text{ک} \text{ قط لا فر لا} = \frac{۱}{۳} \text{ مس لا + مس لا}$$

$$(۱۲) \quad \text{ک} \text{ (قط لا + مس لا) فر لا} = \frac{۱}{۳} \text{ لوک (ا+ب+جم لا)}$$

$$\text{ک} \text{ (قط لا - مس لا) فر لا} = \text{لوک (ا+ب+جم لا)}$$

$$(۱۳) \quad \text{ک} \text{ ا+جم لا} = \frac{\text{ک} \text{ ا+جم لا}}{۱ - \frac{۱}{۳}} \text{ فر لا} = \text{مم لا - مم لا}$$

$$(۱۴) \quad \text{ک} \text{ ا+جب لا} = \frac{\text{ک} \text{ ا+جب لا}}{۱ - \frac{۱}{۳}} \text{ فر لا} = \text{مس لا - قط لا}$$

(۱۵)  $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب لا جم لا}} = \text{مس لا} - \text{مم لا}$

(۱۶)  $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب لا جم لا}} = \text{قط لا} + \text{لوک مس لا}$

(۱۷)  $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جب لا جم لا}} = \frac{1}{2} \text{قط لا} + \text{لوک مس لا}$

(۱۸)  $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{مس لا}} = \frac{1}{2} \text{لا} + \frac{1}{4} \text{لوک (جم لا جب لا)}$

(۱۹)  $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{جم لا}} = \frac{1}{2} \text{سن لا} + \frac{1}{4} \text{مس لا}$

(۲۰)  $\int \frac{\text{لا لا لا لا لا}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{4} \text{لا لا لا لا لا}$

(۲۱)  $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا لا لا لا لا}} = \frac{1}{4} \text{لوک لا لا لا لا لا}$

(۲۲) مزیدی ابدالوں سے  $\int \frac{\text{لا لا لا لا لا}}{\text{فرلا}}$  اور  $\int \frac{\text{لا لا لا لا لا}}{\text{فرلا}}$  کی قیمتیں دریافت کرد۔

(۲۳)  $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا لا لا لا لا}} = \frac{\text{لا لا لا لا لا}}{\text{لا لا لا لا لا}}$

(۲۴)  $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا لا لا لا لا}} = \frac{\text{لا لا لا لا لا}}{\text{لا لا لا لا لا}}$

(۲۵)  $\int \frac{\text{لا لا لا لا لا}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{4} \text{لا لا لا لا لا}$

امثل ۲۸  
تکمل بالخصص

۲۸۰ و ۲۸۱  
بجاء من

ما

بجاء من

بجاء من

بجاء من

بجاء من

بجاء من

بجاء من

بجاء من

بجاء من

بجاء من

بجاء من

بجاء من

بجاء من

(۱)  $\text{لا فولا} = \text{لا} (1 - \text{لا}) \text{فولا}$

(۲)  $\text{لا لوگ لا فولا} = \frac{1}{4} \text{لا} (\text{لوگ لا} - \frac{1}{4})$

(۳)  $\text{لا لوگ لا فولا} = \frac{\text{لا}^{1+2}}{1+2} (\text{لوگ لا} - \frac{1}{1+2})$

(۴)  $\text{لا جب لا فولا} = \text{لا جم لا} + \text{جب لا}$

(۵)  $\text{لا جم لا فولا} = \text{لا جب لا} + \text{جم لا}$

(۶)  $\text{لا جب لا جم لا فولا} = \frac{1}{4} \text{لا جم لا} + \frac{1}{8} \text{جب لا}$

(۷)  $\text{لا جم لا جم لا فولا} = \frac{\text{لا جم لا} - \text{ن}}{\text{م} - \text{ن}} \text{لا جم لا} + \text{ن}$

(۸)  $\text{لا جب لا جب لا فولا} = \frac{\text{لا جب لا} - \text{ن}}{\text{م} - \text{ن}} \text{لا جب لا} + \text{ن}$

(۹)  $\text{لا جب لا جم لا فولا} = \frac{\text{لا جم لا} - \text{ن}}{\text{م} - \text{ن}} \text{لا جب لا} + \text{ن}$

(۱۰)  $\text{لا جب لا فولا} = \text{لا جب لا} + \text{لا} - \text{لا}$

(۱۱)  $\text{لا سن لا فولا} = \text{لا سن لا} - \text{لوگ لا} + \text{لا}$

(۱۲)  $\text{لا قط لا فولا} = \text{لا قط لا} - \text{جنر لا}$



$$(۱۳) \quad \text{لا مس لا فرلا} = \frac{1}{4} (1 + \text{لا}) \text{سن لا} - \frac{1}{4} \text{لا}$$

$$(۱۴) \quad \text{لا قط لا فرلا} = \text{لا مس لا} + \text{لوک جم لا}$$

$$(۱۵) \quad \text{لا + جب لا فرلا} = \text{لا مس لا} + \frac{\text{لا}}{2}$$

$$(۱۶) \quad \text{لا + جب لا فرلا} = \frac{\text{لا} - 1}{2} - \frac{\text{لا} - 1}{2} \text{جب لا} + \text{لا}$$

$$(۱۷) \quad \text{لا جم لا فرلا} = \frac{1}{4} (\text{جب لا جم لا} + \text{جم لا جب لا})$$

$$(۱۸) \quad \text{لا جب لا فرلا} = \frac{1}{4} (\text{جم لا جب لا} - \text{جب لا جم لا})$$

$$(۱۹) \quad \text{لا جم لا فرلا} = \frac{1}{4} (\text{جب لا جب لا} - \text{جم لا جم لا})$$

$$(۲۰) \quad \text{لا جب لا جم لا فرلا} = \frac{1}{4} (\text{جم لا جم لا} + \text{جب لا جب لا})$$

$$(۲۱) \quad \text{لا فوج لا جم لا فرلا} = \frac{1}{11} (\text{جب ۲ لا} - \text{جم ۲ لا}) \text{فو}$$

$$(۲۲) \quad \text{لا فو لا فرلا} = - (\text{لا}^۵ + \text{لا}^۴ + \text{لا}^۳ + \text{لا}^۲ + \text{لا} + ۱) \text{فو}$$

$$(۲۳) \quad \text{لا آجب لا فرلا} = - (\text{لا}^۱۲ + \text{لا}^۱۱ + \text{لا}^۱۰ + \text{لا}^۹ + \text{لا}^۸ + \text{لا}^۷ + \text{لا}^۶ + \text{لا}^۵ + \text{لا}^۴ + \text{لا}^۳ + \text{لا}^۲ + \text{لا} + ۱) \text{جب لا}$$

$$(۲۴) \quad \text{لا آجب لا فرلا} = \text{لا آجب لا فرلا} \text{اور و} = \text{لا آجب لا فرلا}$$

تو ثابت کرو کہ  $\text{ع} = \text{لا آجب لا} - \text{ن و} - ۱$  اور  $\text{و} = \text{لا آجب لا} - \text{ن ع} - ۱$

اس کی مدد سے  $\text{ع}$  اور  $\text{و}$  کی قیمتیں دریافت کرو

$$[\text{ع} = (\text{لا}^۱۲ + \text{لا}^۱۱ + \text{لا}^۱۰ + \text{لا}^۹ + \text{لا}^۸ + \text{لا}^۷ + \text{لا}^۶ + \text{لا}^۵ + \text{لا}^۴ + \text{لا}^۳ + \text{لا}^۲ + \text{لا} + ۱) \text{جب لا}]$$

$$\text{و} = (\text{لا}^۱۲ + \text{لا}^۱۱ + \text{لا}^۱۰ + \text{لا}^۹ + \text{لا}^۸ + \text{لا}^۷ + \text{لا}^۶ + \text{لا}^۵ + \text{لا}^۴ + \text{لا}^۳ + \text{لا}^۲ + \text{لا} + ۱) \text{جب لا}$$

(۲۵) اگر ع تغیر لا کا منطق صحیح تفاعل ہے تو ثابت کرو کہ

$$\int \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \dots \right) \text{ جہاں } \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

(۲۶) سرور ا اور جب کی قیمت دریافت کرو کہ

$$\int \frac{1}{(1+b \text{ جم لا})} = \frac{1}{1+b \text{ جم لا}} + \frac{1}{1+b \text{ جم لا}} \int \frac{1}{1+b \text{ جم لا}}$$

$$\left[ \frac{1}{1+b \text{ جم لا}} = \frac{1}{1+b \text{ جم لا}} \right]$$

مشل ۲۹

(منطق کسور)

$$(1) \int \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} + \int \frac{1}{1-x}$$

$$(2) \int \frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2(1-x)^2} + \int \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$(3) \int \frac{1}{(1-x)^4} = \frac{1}{3(1-x)^3} + \int \frac{1}{(1-x)^3}$$

$$(4) \int \frac{1}{(1-x)^5} = \frac{1}{4(1-x)^4} + \int \frac{1}{(1-x)^4}$$

$$(5) \int \frac{1}{(1-x)^6} = \frac{1}{5(1-x)^5} + \int \frac{1}{(1-x)^5}$$

$$(6) \int \frac{1}{(1-x)^7} = \frac{1}{6(1-x)^6} + \int \frac{1}{(1-x)^6}$$

$$(7) \int \frac{1}{(1-x)^8} = \frac{1}{7(1-x)^7} + \int \frac{1}{(1-x)^7}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\text{ب' لوک (لا-ب)}}{(\text{ب-ج})(\text{ج-ب})} + \frac{\text{ج' لوک (لا-ج)}}{(\text{ج-د})(\text{د-ج})} = \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)(\text{لا} + \text{ب})} \quad (۸) \\
 & \frac{\text{لا فرلا}}{(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)(\text{لا} + \text{ب})} = \frac{1}{\text{ب}^2 - \text{لا}^2} \left( \frac{1}{\text{لا}} \text{سن} \frac{\text{لا}}{1} - \frac{1}{\text{ب}} \text{سن} \frac{\text{لا}}{1} \right) \quad (۹) \\
 & \frac{\text{لا فرلا}}{(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)(\text{لا} + \text{ب})} = \frac{1}{(\text{ب}^2 - \text{لا}^2)} \text{لوک} \frac{\text{لا}}{\text{لا}^2 + \text{ب}^2} \quad (۱۰) \\
 & \frac{\text{لا فرلا}}{(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)(\text{لا} + \text{ب})} = \frac{1}{\text{ب}^2 - \text{لا}^2} \left( \text{وسن} \frac{\text{لا}}{1} - \text{ب سن} \frac{\text{لا}}{1} \right) \quad (۱۱) \\
 & \frac{\text{لا فرلا}}{(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)(\text{لا} + \text{ب})} = \frac{1}{(\text{ب}^2 - \text{لا}^2)} \left\{ \text{لا لوک (لا}^2 + \text{ب}^2) \right. \\
 & \quad \left. - \text{ب لوک (لا}^2 + \text{ب}^2) \right\} \quad (۱۲) \\
 & \frac{\text{لا فرلا}}{(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)(\text{لا} + \text{ب})} = \frac{2}{(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)} + \frac{2}{(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)} \text{لوک} \frac{\text{لا}}{1 + \text{لا}} \quad (۱۳) \\
 & \frac{\text{لا فرلا}}{(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)(\text{لا} + \text{ب})} = \frac{2}{(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)} + \frac{2}{(\text{لا}^2 + \text{ب}^2)} \text{لوک (لا} + 1) \quad (۱۴) \\
 & \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^2 - \text{ب}^2)(\text{لا} + \text{ب})} = \frac{1}{\frac{1}{3}} \text{لوک} \frac{1 + \text{لا}}{1 - \text{لا}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \text{لا}} \quad (۱۵) \\
 & \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^2 - \text{ب}^2)(\text{لا} + \text{ب})} = \frac{1}{\frac{1}{3}} \times \frac{1}{\frac{\text{لا}}{1 - \text{لا}}} + \frac{1}{\frac{1}{3}} \text{لوک} \frac{1 + \text{لا}}{1 - \text{لا}} \quad (۱۶) \\
 & \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^2 - \text{ب}^2)(\text{لا} + \text{ب})} = \frac{2 - \text{لا}}{(\text{لا} - 1)(\text{لا})} + \frac{\text{لا}}{1 - \text{لا}} \text{لوک} \frac{\text{لا}}{1 - \text{لا}} \quad (۱۷) \\
 & \frac{\text{لا فرلا}}{(\text{لا}^2 - \text{ب}^2)(\text{لا} + \text{ب})} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{\text{لا}}{1 - \text{لا}}} - \frac{1}{\frac{1}{3}} \text{لوک} \frac{1 + \text{لا}}{1 - \text{لا}} \quad (۱۸) \\
 & \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^2 - \text{ب}^2)(\text{لا} + \text{ب})} = \frac{3}{2} \text{لوک} \frac{1 - \text{لا}}{1 + \text{لا}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{\text{لا}}{1 - \text{لا}}} \quad (۱۹)
 \end{aligned}$$

$$\int \frac{فرلا}{(1+لا)^2} = -\frac{1}{لا} + \frac{1}{لا^2} - \frac{لوک}{(1+لا)} + لوک لا \quad (19)$$

$$\int \frac{2+لا}{لا(1+لا)^2} = فرلا - \frac{2}{لا} + \frac{1}{1+لا} - \frac{1}{لا(1+لا)^2} \quad (20)$$

$$\int \frac{فرلا}{لا(1-لا)^2} = \frac{3}{14} لوک + \frac{1-لا}{1+لا} + \frac{3}{8} \times \frac{لا}{1-لا} - \frac{1}{3} \times \frac{لا}{لا(1-لا)^2} \quad (21)$$

$$\int \frac{1+لا}{لا(1+لا)} - فرلا = لوک \frac{لا}{لا^2+1لا} + مس لا \quad (22)$$

$$\int \frac{فرلا}{لا-1} = \frac{1}{3} لوک - \frac{1+لا}{لا-1} + \frac{1}{2} مس لا \quad (23)$$

$$\int \frac{لا^2 فرلا}{لا-1} = \frac{1}{3} لوک - \frac{1+لا}{لا-1} - \frac{1}{2} مس لا \quad (24)$$

$$\int \frac{فرلا}{لا+1} = \frac{1}{4} لوک + \frac{1+لا}{لا+1} + \frac{1}{3} مس \frac{1-لا}{2} \quad (25)$$

$$\int \frac{لا فرلا}{لا+1} = \frac{1}{4} لوک + \frac{1-لا}{لا+1} + \frac{1}{3} مس \frac{1-لا}{2} \quad (26)$$

$$\int \frac{فرلا}{لا(1+لا)} = \frac{1}{4} لوک (1+لا) - \frac{1}{4} لوک (1+لا) + \frac{1}{4} مس لا \quad (27)$$

$$\int \frac{لا^2 فرلا}{لا(1+لا)} = \frac{1}{4} لوک (1+لا) + \frac{1}{4} لوک (1+لا) - \frac{1}{4} مس لا \quad (28)$$

$$\int \frac{لا^2 فرلا}{لا^2+لا+1} = \frac{1}{4} لوک + \frac{1-لا}{1+لا} + \frac{1}{2} مس \frac{لا}{2لا} \quad (29)$$

$$\int \frac{لا^2 فرلا}{لا^2+لا+1} = لوک (لا^2+2) - \frac{1}{4} لوک (1+لا) \quad (30)$$

$$\int \frac{لا^2 فرلا}{لا(1+لا)^2} = \frac{1}{4} لوک (1-لا) - \frac{1}{4} لوک (1+لا) - \frac{1}{2} (1-لا)^2 \quad (31)$$

$$\int \frac{لا^۲ - لا + ۱}{لا^۲ + لا + ۱} فرلا = \frac{۱}{۲} لوک \quad (۳۲)$$

$$\int \frac{فرلا}{لا^۲(لا+۱)} = مسن لا + \frac{۱}{لا} - \frac{۱}{لا^۳} \quad (۳۳)$$

$$\int \frac{لا^۳ فرلا}{لا^۲(لا+۱)} = \frac{لا^۲ + ۱}{۲(لا+۱)} - \frac{۱}{لا} \quad (۳۴)$$

$$\int \frac{فرلا}{لا^۲(لا+۱)} = \frac{فرلا}{لا^۲(لا+۱)} - \frac{۳}{۲} مسن لا - \frac{لا^۲ + ۲}{لا(لا+۱)} \quad (۳۵)$$

$$\int \frac{فرلا}{لا^۲ + ۱} = \frac{لوک}{لا^۲} - \frac{لا^۲ + ۱}{لا^۲ + لا - ۱} \quad (۳۶)$$

$$+ \frac{۱}{لا^۲} مسن لا - \frac{لا^۲ + ۱}{لا - ۱}$$

$$\int \frac{لا^۲ فرلا}{لا^۲ + ۱} = \frac{۱}{لا^۲} لوک - \frac{لا^۲ + لا - ۱}{لا(لا+۱)} \quad (۳۷)$$

$$+ \frac{۱}{لا^۲} مسن لا - \frac{لا^۲ + ۱}{لا - ۱}$$

مشله ۳

(غیر منطبق تفاعل)

$$\int لا^۲(لا+۱) فرلا = \frac{۲}{۵} (لا+۱) - \frac{۲}{۳} (لا+۱) \quad (۱)$$

$$\int \frac{فرلا}{لا(لا+۱)(لا+۲)} = \frac{۲}{۳(لا+۲)} \left\{ \frac{۲}{لا+۱} - \frac{۲}{لا} \right\} \quad (۲)$$

$$\int \frac{فرلا}{لا(لا+۱)(لا+۲)} = \frac{۲}{لا(لا+۱)(لا+۲)} لوک (لا-۱) \quad (۳)$$

$$(۴) \quad \int \frac{فرلا}{(لا-۱)لا} = \text{لوک} = \frac{لا+۱}{لا-۱} \quad \text{مستقل} = ۲$$

$$(۵) \quad \int \frac{فرلا}{(لا-۱)لا+لا} = \frac{فرلا}{۲} \quad \text{مستقل} = \frac{لا+۱}{۲} \quad \text{مستقل} = لا+۱ = ۶$$

$$(۶) \quad \int \frac{فرلا}{(لا+۱)لا-لا} = \frac{فرلا}{۲} \quad \text{مستقل} = \frac{لا-۱}{۲} \quad \text{مستقل} = لا-۱ = ۱$$

$$(۷) \quad \int \frac{فرلا}{لا+لا-۱} = \text{لوک} (لا+لا-۱) = \frac{۲}{۳} \quad \text{مستقل} = \frac{۲}{۳} \quad \text{مستقل} = ۱+۱-۱ = ۱$$

$$(۸) \quad \int \frac{لا}{لا-۱} = فرلا = لا+۱ \quad \text{لوک} = \frac{لا-۱}{لا+۱}$$

$$(۹) \quad \int \frac{فرلا}{لا+لا} = \text{لوک} = \frac{لا+۱-لا}{لا+لا+۱}$$

$$(۱۰) \quad \int \frac{فرلا}{لا+لا+۱} = -\frac{لا+۱}{لا} - \frac{۱}{۲} \quad \text{لوک} = \frac{لا-۱}{لا+لا+۱}$$

$$(۱۱) \quad \int \frac{لا^۲ فرلا}{لا+لا+۱} = \frac{۱}{۲} لا \quad \text{لا} \quad \text{جبت} = \frac{۱}{۲} - ۱ + ۱ = ۱$$

$$(۱۲) \quad \int \frac{لا^۲ فرلا}{(لا+۱)لا} = -\frac{لا}{لا+۱} + \text{جبت} = لا$$

$$(۱۳) \quad \int \frac{فرلا}{(لا+۱)لا-۱} = \frac{۱}{۲} \quad \text{مستقل} = \frac{لا}{لا-۱}$$

$$(۱۴) \quad \int \frac{فرلا}{(لا-۱)لا+لا} = \frac{۱}{۲} \quad \text{لوک} = \frac{لا+۱+لا}{لا+لا-۱}$$



# ساتواں باب

## محدود تکملے

۸۷۔ تمہید۔ رقبوں کا سوال۔ تکمل کے سوال کا جو مفہوم اب ہم بیان کرینگے اس کے لحاظ سے یہ سوال بہت قدیم ہے لیکن اس کے حل کا عام طریقہ حال میں ہی نیوٹن اور لیب نیز کے وقت میں حاصل ہوا۔ اس دفعہ اور اگلی دفعہ میں اس طریقہ کو منطقی تفصیلات میں جانے کے بغیر مختصر طور پر بیان کیا جائیگا اور یہ مان لیا جائیگا کہ ”رقبوں کا سوال“ کافی طور پر اس طریقہ کی تمثیلی صورت ہے۔ اس طرح اصل اصول آسانی سے سمجھ میں آجائیگا۔ اسکے بعد دفعات ۸۹ تا ۹۴ میں اس سوال پر نئے سرے سے زیادہ عام اور دقیق نقطہ نظر سے بحث کی جائے گی۔

فرض کرو کہ وہ رقبہ دریافت کرنا مطلوب ہے جو مسلسل منحنی

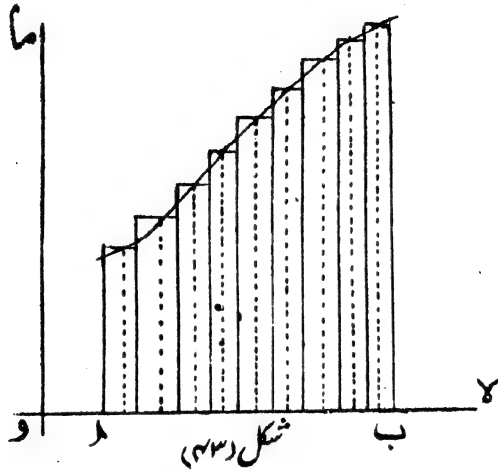
ما = فضا (لا) ..... (۱)

محور لا اور معینوں لا = لا، لا = ب کے درمیان گھرا ہوا ہے تعین کی خاطر یہ فرض کر لیا جاتا ہے کہ ما، لا کی سمت زیر بحث میں مثبت ہے اور

ب < لا۔ اس سمت ب۔ کو ہم ذیلی حصوں ہ، ہ، ہ، ہ، ..... ہ

☆ اس دفعہ اور اگلی دفعہ میں لفظ ”رقبہ“ کو عام و جدانی یا عقلی مفہوم کے مطابق لیا جائے گا جدید نقطہ نظر سے رقبہ کی نئی تعریف ضروری ہے۔ دیکھو دفعہ ۹۹۔

میں تقسیم کرتے اور ان کو قاعدے مان کر مستطیلوں کا ایک سلسلہ بناتے ہیں جن کے ارتفاع ترتیب وار 'ما'، 'ما'، 'ما'، ..... مان منحنی کے ایسے منحنی ہیں



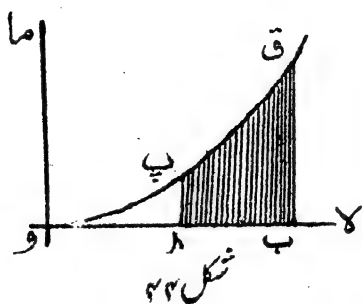
جنہیں مختلف قاعدوں کے اندر کے کسی اختیاری نقطوں سے منحنی تک کھینچا گیا ہے۔ اس طور پر جو مستطیل بنائے جائیں ان کے رقبوں کا مجموعہ رقبہ مطلوبہ کا ایک تقرب ہو گا۔ ممکن ہے کہ یہ تقرب رقبہ کو صحیح طور پر تعبیر کرے لیکن یہ ظاہر ہے کہ ذیلی حصوں 'ہا'، 'ہا'، 'ہا'، ..... 'ہا' کو جتنا چھوٹا لیا جائیگا یعنی تقسیم کے حصوں کی متناظر تعداد جس قدر زیادہ ہوگی اتنا ہی یہ تقرب بہتر ہوگا۔ ان مستطیلوں کے مجموعہ کی انتہا جبکہ حصوں کو لا انتہا چھوٹا بنا دیا جائے مطلوبہ رقبہ ہوگا۔

احصائی ایجاد سے پہلے اسی طرح کا عمل یا اس کے مرادف کوئی اور عمل چہر منحنی کے لئے بشرط امکان الگ طور پر کیا جاتا تھا، اکثر اوقات یہ طریقہ نہایت مستفہم اور خوش فکر ہوا کرتے تھے۔ ذیل کی مثالیں بطور توضیح کے دی جاتی ہیں۔

مثال ۱۔ جرقہ مکانی  $ما = لا^۲$ ، محور  $لا$  اور معینوں  $لا = ۱$ ،  $لا = ۲$  کے

درمیان گھرا ہوا ہے اسے دریافت کرو۔





رکھو  $h_1 = h_2 = \dots = h_n = h$  تو

$$h_1 = h_2 = \dots = h_n = h \quad \text{.....} \quad \{h(1-n) + 1\} = h \quad \text{.....} \quad \{h(2-n) + 1\} = h \quad \text{.....} \quad \{h(n-1) + 1\} = h$$

ہیں ذیل کے مجموعہ پر غور کرنا ہے

$$h \{h(1-n) + 1\} + \dots + h \{h(2-n) + 1\} + h \{h(n-1) + 1\} =$$

$$= n \{h(1-n) + 1\} + \dots + h \{h(2-n) + 1\} + h \{h(n-1) + 1\} =$$

$$= n \{h(1-n) + 1\} + h \{h(1-n) + 1\} + \dots + h \{h(n-1) + 1\} =$$

$$= \{h(1-n) + 1\} + \{h(2-n) + 1\} + \dots + \{h(n-1) + 1\} =$$

جب 'ن' مال بہ لاتنا ہی ہوتا ہے تو اسکی انتہائی قیمت ہوتی ہے (۲).....

$$\{h(1-n) + 1\} + \{h(2-n) + 1\} + \dots + \{h(n-1) + 1\} =$$

مثال ۲۔ منحنی کی عام صورت  $y = ax^b$  ..... (۴) جہاں  $a$  کی کوئی صحیح یا کمزور قیمت، مثبت یا منفی سوائے ۱ کے ہو اس طور پر بحث میں آ سکتی ہے۔

تحت (ب۔ ۱) کے نقاط تقسیم کے فضلوں کو حسابی سلسلہ میں لینے کی بجائے جیسے عام طور پر لیا جاتا ہے ہندسی سلسلہ میں تقسیم کرتے ہیں، اس طرح فضلے یہ ہوتے ہیں

$\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3, \dots, \Delta y_n$  جہاں  $\Delta y = \frac{y}{n}$



ذیل کے مجموعہ کی انتہا پر غور کرنا ہوگا

$$\Sigma = \left\{ \text{جب } (ع + \frac{ه}{۲}) + \text{جب } (ع + \frac{ه}{۲}) + \dots + \text{جب } (ب - \frac{ه}{۲}) \right\}$$

$$+ \text{جب } (ب - \frac{ه}{۲}) \dots \dots \dots (۱۲)$$

۲۰۴ جہاں ہر دفعہ کے وسط پر جب لاکھ قیمتیں لگی ہیں۔ اب

$$\frac{\text{جب } \frac{ه}{۲}}{\frac{ه}{۲}} = \Sigma = ۲ \text{ جب } \frac{ه}{۲} \text{ جب } (ع + \frac{ه}{۲}) + ۲ \text{ جب } \frac{ه}{۲} \text{ جب } (ع + \frac{ه}{۲})$$

$$+ \dots + ۲ \text{ جب } \frac{ه}{۲} \text{ جب } (ب - \frac{ه}{۲}) + ۲ \text{ جب } \frac{ه}{۲} \text{ جب } (ب - \frac{ه}{۲})$$

$$= \text{جم } ع - \text{جم } (ع + \frac{ه}{۲})$$

$$+ \text{جم } (ع + \frac{ه}{۲}) - \text{جم } (ع + \frac{ه}{۲})$$

$$\text{جم } (ب - \frac{ه}{۲}) - \text{جم } (ب - \frac{ه}{۲})$$

$$+ \text{جم } (ب - \frac{ه}{۲}) - \text{جم } (ب - \frac{ه}{۲})$$

$$= \text{جم } ع - \text{جم } ب \dots \dots \dots (۱۳)$$

اس لئے انتہا کی طرف گزرنے سے (ع ← ب) مطلوبہ رقبہ ہے

$$\text{جم } ع - \text{جم } ب \dots \dots \dots (۱۴)$$

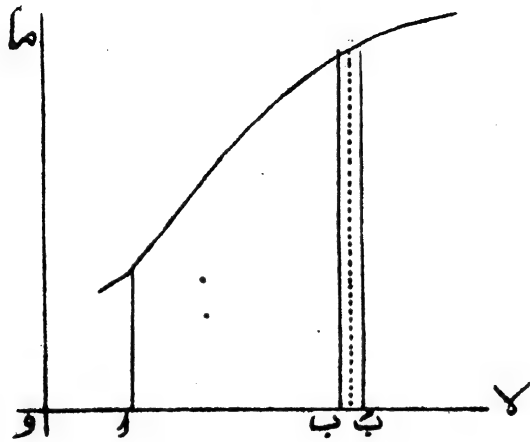
۸۸۔ مقلوب تفرق کے ساتھ تعلق۔ اوپر کی طرح کے حسابات

محکمہ احصا کے قاعدہ کی مدد سے عمل میں لائے جاتے ہیں اس کی طرف اب ہم متوجہ ہوتے ہیں اگر ا کو ثابت رکھا جائے اور ب کو بدلایا جائے تو دفعہ ۸۸ کا رقبہ

ب کا تفاعل ہے اور یہ تفاعل صفر ہوتا ہے جبکہ ب = ۱ - اگر ب کو صفاری اضافہ مف ب دیا جائے تو رقبہ کا اضافہ آخر لامر ایک مستطیل کے رقبہ کے مساوی ہوگا جس کا عرض مف ب اور ارتفاع ع (ب) ہے (دیکھ دفعہ ۴۵) پس اگر رقبہ زیر بحث ق ہو تو

$$\text{مف ق} = \text{ع (ب) مف ب} \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{فرق} \\ \text{فرق} = \text{فہ (ب)} \dots\dots\dots (۲)$$



شکل ۴۵

اگر پہ (لا) ایک ایسا تفاعل ہو کہ پہ (لا) = فہ (لا) یعنی  
پہ (لا) فہ (لا) کا "نامحدود منحنی" ہو تو

$$\text{فرق} \\ \text{فرق} = \text{پہ (ب)} \dots\dots\dots (۳)$$

دفعہ ۵۶ سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ق} = \text{پہ (ب)} + م \dots\dots\dots (۴)$$

جہاں م مستقل ہے اور چونکہ ق صفر ہوتا ہے ب = ۰ کے لئے اسلئے  
لازم ہونا چاہئے م = - پہ (۰) پس ق = پہ (ب) - پہ (۰) ..... (۵)  
گویا رقبہ معلوم کرنے کا سوال اس طرح نامحدود منحنی کے سوال میں بدل گیا جس پر  
گزشتہ باب میں بحث کی گئی ہے۔

مثال ۱۔ اگر فہ (لا) = لا تو پہ (لا) =  $\frac{۱۰۴ لا}{۱ + م}$  اور



اس حاصل جمع کی قیمت عام طور پر ایک توسعت ب۔ ا کے طریقہ تقسیم کے ساتھ بدلیگی اور دوسرے ان مختلف وقفوں (۱) کے اندر قیمتوں 'ما'، 'ما'، 'ما'..... والی کے انتخاب پر۔ لیکن اگر یہ شرط عامل کر دیا جائے

کہ ان میں سے کوئی وقفہ بھی ایک مقررہ مقدار گ سے تجاوز نہیں کر سکتا تو بعض صورتوں میں ہم دیکھتے آ اور ان صورتوں میں اکثر ایسے تفاعلوں کے نمونے شامل ہونگے جن سے احصا کے استعمال کی ضمن میں واسطہ پڑا ہے (اور کسی اور) کہ ح کی قیمت 'گ' کے کم ہونے کے ساتھ ایک معین انتہائی قیمت سے اس کی طرف اس طور پر رائل ہوتی ہے کہ گ کو کافی طور پر چھوٹا کرنے سے اس امر کا یقین ہو سکتا ہے کہ ح کا تفاوت سے کسی چھوٹی سے چھوٹی مقررہ مقدار کی نسبت کم ہوگا۔

جس مجموعہ کو ح سے تعبیر کیا گیا ہے اسے زیادہ تفصیل سے یوں بیان کر سکتے ہیں

ح ب و م ف لا یا ح ب ف د (لا) م ف لا ..... (۴)

جہاں م ف لا کو لا کے اضافوں 'ہ'، 'ہ'، 'ہ'..... کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔ جب اضافے م ف لا 'تمام لا' انتہا چھوٹے ہوتے ہیں اور اس لئے انکی تعداد لا انتہا بڑھتی ہے تو اس انتہائی قیمت کو (جبکہ اسکا وجود ہو) جسکی طرف یہ مجموعہ مستحق ہوتا ہے حدود ا اور ب کے درمیان ف د (لا) کا "محدود تکملہ" کہتے ہیں" اسے ہم

ف د م ف لا یا ف د (لا) ف د ..... (۵) [  $\int_a^b dx$  ]

سے تعبیر کریں گے اس ترتیب کو اختیار کرنے سے عمل کی وہ منہ لیں جن سے

انتہائی قیمت حاصل کی گئی تھی بیش نظر رہتی ہیں<sup>+</sup>

ایسے سوالات جن میں (۳) جیسے مجموعہ کی انتہائی قیمت مطلوب ہوتی ہے علم ریاضی کی تقریباً ہر شاخ میں پائے جاتے ہیں۔ منحنی کے رقبہ پر پہلے بحث کی گئی ہے۔ اور دیگر سادہ مثالیں یہ ہیں۔ قوس کا طول جسے اندرونی (یا بیرونی) کثیر الاضلاع کے محیط کی انتہائی خیال کیا جائے، گردشی مجسم کا حجم وغیرہ۔ انھوں باب میں ان پر خاص طور پر بحث کی جائے گی۔

حرکیات میں متغیر قوت کے دھکے (Impulse) کی یہ تعریف کی گئی ہے کہ یہ وقت کے کسی وقفہ میں قوت کا ”زمانی تکملہ“ ہے یعنی اگر قوت  $Q$  کا تفاعل خیال کیا جائے تو دھکے وقفہ  $t$ ۔ تب میں ذیل کے مجموعہ کی انتہائی قیمت ہے

$$Q_1 t_1 + Q_2 t_2 + \dots + Q_n t_n \dots (1)$$

جہاں  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  قوتیں وقفہ  $t_1, t_2, \dots, t_n$  کے ذیلی حصے ہیں اس طور پر کہ

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n = t \dots (2)$$

اور  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  ان وقفوں میں قوت کی قیمتیں ہیں۔ پس ہماری موجودہ ترتیب کے لحاظ سے دھکے ہے

$$Q \cdot t \dots (3)$$

نوٹ:۔ تکملہ  $\int$  میں علامت  $\int$  حرف  $s$  کی خاص صورت ہے، اسکو پہلے ریاضی دانوں نے (Summation) حاصل جمع کی علامت کے لئے اختیار کیا۔ تکمل کی سمیت کو اس طور پر ظاہر کرنے کا طریقہ فوریوں کی ایجاد ہے۔

$\int$  فہ (لا) فرلا میں علامت  $\int$  مجموعہ کا میسم (م) سمجھا جاتا ہے (مجموعہ)

نیوٹن کے دوسرے قانون حرکت کے مطابق کسی کمیت (ک) کے  
معیار کی تبدیلی اس دھکے کے مساوی ہوتی ہے جو اسے لگتا ہے یا

$$گ و گ و = \int ق فرت \dots \dots (9)$$

جہاں و، و، ابتدائی اور انتہائی رفتاریں ہیں۔  
نیز متغیر قوت کا کام قوت کا مکانی ٹکڑہ ہے۔ اگر قوت ق، جسم کے  
مقام (س) کا تفاعل ہو تو س جیسے س سے س تک بدلنا ہے  
کام جو کیا گیا ہے وہ ہے

$$\int ق فرس : \dots \dots (10)$$

مثلاً گیس کی اکائی کمیت جب حجم ج سے ج تک چلتی ہے تو جو کام ہوتا ہے

$$\int د فرح \dots \dots (11)$$

ہے اگر حجم ج کے وقت دباؤ د ہو۔ اسے ہم دیکھ سکتے ہیں اگر گیس کو  
اکائی رقبہ کی تراش کے اسطوانہ میں، فشارہ کے ذریعہ بند کیا ہو فرض کیا جائے  
سنگھ (۱۰) یا (۱۱) کی ترکیبی تعبیر اکثر اوقات عملیات میں استعمال کیجاتی  
ہے مثلاً (۱۰) کی صورت میں اگر ایک مینٹی بنایا جائے جس میں س فضلہ ہو  
اور ق معین تو کام اس رقبہ سے تعبیر ہوگا جو تختی، س کے محور اور  
س اور س کے متناظر معینوں کے درمیان گھرا ہوا ہے یہ واٹ کی نائندہ تصویر  
کا اصول ہے۔

۹۰۔ استدقاق کا ثبوت - جب مجموعہ ج کی ایک



معین انتہائی قیمت ہو جیسا اوپر بیان ہوا تو فدا (لا) کو قابل تکمل کہا جاتا ہے۔

یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ ہر مسلسل تفاعل اس مفہوم کے مطابق قابل تکمل ہے لیکن باضابطہ ثبوت کے مد نظر ہم اپنی توجہ صرف اس خاص صورت تک محدود رکھینگے جس میں تغیر متبوع کی سرعت محدود و تعداد کے ایسے وقفوں میں منقسم ہو سکتی ہے جن میں سے ہر ایک میں تفاعل یا تو استقلال کے ساتھ بڑھتا ہے یا استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے۔ عملی نقطہ نظر سے یہ کافی ہوگا۔ (محدود ہونے کی قید کے علاوہ) کوئی اور قید عائد کرنے سے پہلے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ دو ثابت حدود مقرر کئے جاسکتے ہیں جن کے درمیان  $\chi$  لازماً واقع ہوتا ہے۔ اگر وقفہ (ب۔ ا) کے اندر تفاعل فدا (لا) کی قیمتوں کی پگھلی اور اوپر کی حدود (دفعہ ۱) لہا اور مہا ہوں تو ظاہر ہے کہ  $\chi$  ذیل کے جملوں کے درمیان واقع ہوگا۔

$$لہا (ہم + ہم + ..... + ہن) = لہا (ب۔ ا)$$

اور مہا (ہا + ہم + ..... + ہن) = مہا (ب۔ ا)  
 تخصیص کی خاطر اب ہم مان لیتے ہیں کہ ب  $\leq$  ا اور فدا (لا) استقلال کے ساتھ بڑھتا ہے جسے 'لا' سے ب تک بڑھتا ہے۔  
 وقفہ (ب۔ ا) کی تقسیم کے کسی خاص طریقہ

$$ہا، 'ہم'، .....، ہن \dots\dots\dots (۱)$$

پر غور کرو اور فرض کرو کہ

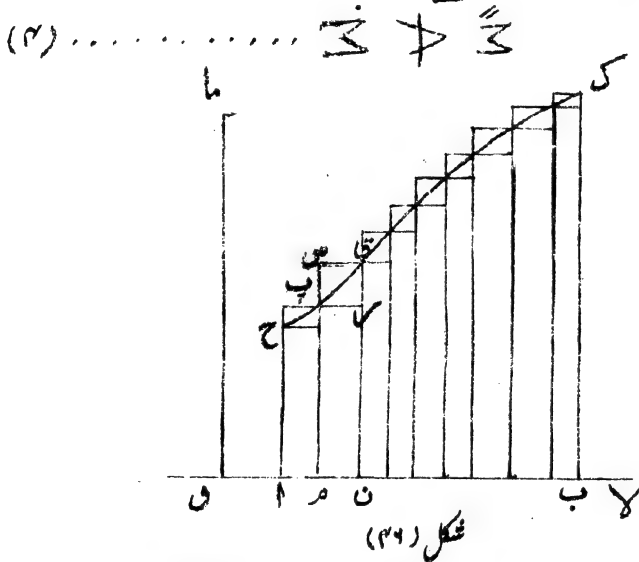
$$\chi = ہا، ہم + ہم، ..... + مان، ہن \dots\dots\dots (۲)$$

+ اس کے معنی ہیں یہی کہ تکملہ کے لئے ریاضی ضابطہ حاصل ہو سکتا ہے۔

جہاں دفعہ ۸۹ کے مطابق مار کوئی قیمت ہے جو تفاعل وقفہ ہر میں اختیار کرتا ہے۔

اب (۲) میں مار، مار، مار، مار کی بجائے تفاعل کی دو قسمیں رکھو جو ان وقفوں کے شروع میں ہیں، اس طرح کوئی رقم نہیں بڑھے گی۔ اگر محصلہ مجموعہ کو  $\sum$  سے تعبیر کیا جائے تو

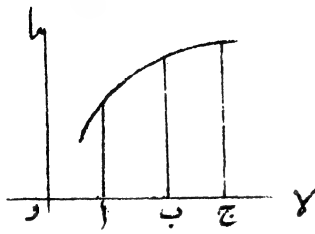
اس کے بعد اگر مار، مار، مار، مار کی بجائے تفاعل کی دو قسمیں درج کی جائیں جو بالترتیب ان وقفوں کے آخری سروں پر ہیں تو کوئی رقم کم نہیں ہوگی۔ اس لئے محصلہ مجموعہ  $\sum$  ہو تو:



شکل ۴۶ میں مقدار  $\sum$  ایسی مستطیلوں کے سلسلہ کا مجموعہ ہے جسے پ ن اور  $\sum$  ایسی مستطیلوں کا مجموعہ جیسے پ ن - اس لئے فرق  $\sum$  -  $\sum$  ایسی مستطیلوں کے مجموعہ سے تعبیر ہوتا ہے جیسے پ ن - موخر الذکر مستطیلوں کے ارتفاعوں کا مجموعہ ک پ -  $\sum$  ایسا فہا (ب) - فہ (۱) ہے، اگر ک بڑے سے بڑا قاعدہ ہو یا وقفوں (۱)







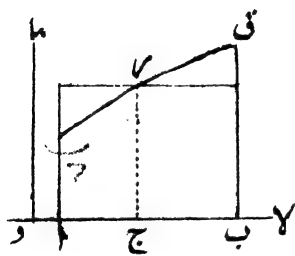
شکل (۳۸)

فہ (لا) فرلا

شکل ۳۸ سے اسکی تریسی توضیح ہوتی ہے  
(۳) اگر فہ (لا) کی کم سے کم اور بڑی سے  
بڑی قیمتیں لہ اور مہ ہوں جیسے  
لا، ا سے ب تک گزرتا ہے تو ٹھکلہ

قیمتوں لہ (ب-ا) اور مہ (ب-ا) کے درمیان واقع ہوتا ہے اور اسلئے لازماً  
یہ (ب-ا)

کے مساوی ہے جہاں لہ اور مہ کے درمیان مقدار یہ واقع ہے۔  
اگر فہ (لا) منسل ہو تو مسعت (ب-ا) کے اندر یہ تفاعل وہ تمام  
قیمتیں اختیار کرتا ہے جو لہ مہ کے درمیان واقع ہیں۔ اسلئے ا اور ب  
کے درمیان لا کی کوئی ایک قیمت (ج)



شکل (۳۹)

ج = ا + طہ (ب-ا)

ضرور ایسی ہونی چاہئے کہ فہ (ج) = یہ  
شکل ۳۹ کی تریسی تقسیم میں رہے  
پ (ب-ا) ق اس منتطیل کے مساوی  
جس کا قاعدہ ا ب ہے اور ارتفاع مسعت  
ا ب کے ایک نقطہ ج کے معین  
کے مساوی ہے۔ صریحاً اہم لکھ سکتے ہیں

جہاں طہ کوئی مقدار ہے جو ا اور ا کے درمیان واقع ہے اس قرار داد کے مطابق

فہ (لا) فرلا = (ب-ا) فہ لہ + طہ (ب-ا) کم ..... (۳)

(۴) زیادہ عام طور پر اگر ع، و، مائیں ایسے لا کے تفاعل ہوں کہ ا سے

ب تک لا کی قیمتوں کے لئے ع < م < و ..... (۴)

تو ٹھکلہ لہ م فرلا ..... (۵)

لحاظ قیمت تکملوں  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  و  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  فرلا اور  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  و  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  فرلا ..... (۶) کے درمیان واقع ہوگا۔

پہلے فرض کرو کہ  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  <  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$ ۔ تب  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  و  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  فرلا۔  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  و  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  فرلا =  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  و  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  فرلا۔ (۷) کی رو سے اس مجموعہ کی ہر رقم جس کی انتہا آخری تکملہ ہے مثبت ہوگی۔ اس لئے

$\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  و  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  فرلا >  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  و  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  فرلا ..... (۷)

اور اسی طرح  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  و  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  فرلا <  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  و  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  فرلا ..... (۸) اگر  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  >  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  تو (۷) اور (۸) کی نامساواتیں الٹ جائیں گی۔  
۹۲۔ محدود تکملہ کا تفرق اسکی کسی حد کے لحاظ سے۔

فرض کرو کہ  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  =  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  و  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  فرلا ..... (۱)

صیحات ”تکمل کے حدود“ و ”ب کا تفاعل“ ہے اور عام طور پر یہ لگا جاتا ہے کہ کوئی ایک بدلے۔ اور کو ثابت مان کر ت کا اشتقاق تفاعل لحاظ اوپری حد کے مرتب کرو اس طرح

ت + مفات =  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  و  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  فرلا =  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  و  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  فرلا +  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  و  $\begin{smallmatrix} \text{ب} \\ \text{ا} \end{smallmatrix}$  فرلا

..... (۲)

دفعہ ۹۱، (۲) کی رو سے۔ اس لئے

مفت =  $\frac{\text{فہ (لا) فرلا}}{\text{فہ (ب) + طہ مفت (ب)}}$  (۳)

دفعہ ۹۱ (۳) کی رو سے - اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مفت مفت کے ساتھ بعدوم ہوتا ہے یعنی ت، ب کا مسلسل تفاعل ہے۔

نیز چونکہ  $\frac{\text{مفت}}{\text{مفت ب}} = \text{فہ (ب) + طہ مفت (ب)}$  (۴) اتہا مفت ب ہے۔ لینے سے

$\frac{\text{فرت}}{\text{فرب}} = \text{فہ (ب)}$  (۵)

اسی طرح اگر اوپر کی حد ب کو ثابت رکھ کر نجلی حد (کو بدلا جائے تو ت و کا مسلسل تفاعل ہو گا اور

$\frac{\text{فرت}}{\text{فرا}} = \text{فہ (ا)}$  (۶)

۹۳۔ نامحدود تکملہ کا وجود - اب ہم دکھا سکتے ہیں کہ کوئی

تفاعل فہ (لا) جسکی نوعیت وہ ہو جو دفعہ ۹۰ میں بیان کی گئی ہے ایک نامحدود تکملہ رکھتا ہے یعنی ایک ایسے قابل تعین (ضروری نہیں کہ یہ محسوب بھی ہو سکے) تفاعل پہ (لا) کا وجود ہے کہ

پہ (لا) = فہ (لا) (۱)

یا پہ (لا) = عفا فہ (لا) (۲)

کیونکہ اگر لکھا جائے پہ (ضمہ) =  $\frac{\text{فہ (لا) فرلا}}{\text{فہ (لا)}}$  (۳)

تو بائیں جانب کا جملہ دفعہ ۹۰ کی رو سے، ضمہ کا ایک قابل تعین تفاعل ہے اور اوپر کی تحقیق سے واضح ہے کہ اس شرط کو پورا کرتا ہے

پہ (ضمہ) = فہ (ضمہ) (۴)

موجودہ نقطہ نظر سے (۳) میں تکمیل کی بجلی حد اختیار ہے اور اس لئے تفاعل پہ (۲) جمع شدنی متقل کی حد تک قابل تعین ہے کیونکہ دفعہ ۹۱ (۲) کی رو سے (۳) میں بجلی حد کے طور پر لا کی بجائے لا ورج کرنا گویا بائیں جانب تکمیل

۲۰

۲۰

فہ (لا) فرلا

کا جمع کر دینا ہے۔ مقابلہ کرو دفعہ ۷۲ کے ساتھ۔

۹۲۔ محدود تکمیل کے محسوب کرنیکا قاعدہ۔

جب کبھی پہ (لا) کی تحلیلی شکل معلوم ہو جس کا پہلا مشتق فہ (لا) ہے تو محدود تکمیل

hypocla

ت = فہ (لا) فرلا ..... (۱)

کی قیمت فوراً لکھی جاسکتی ہے۔ کیونکہ اگر لا کو ثابت رکھا جائے تو دفعہ ۹۲ کی رو سے ۲۱۳

فرت = فہ (ب) = پہ (ب) ..... (۲)

بموجب فرض۔ دفعہ ۵۶ سے حال ہوتا ہے کہ ت اور پہ (ب) صرف "ایک متقل" کے لحاظ سے متفادت ہو سکتے ہیں یعنی ان میں فرق صرف ایک متقل متفاد کا ہو سکتا ہے جو ب پر منحصر نہ ہو۔ پس

فہ (لا) فرلا = پہ (ب) + م ..... (۳)

م چونکہ ب پر منحصر نہیں اس لئے م معلوم کر نیکے لئے رکھو ب = لا جس سے

پہ (لا) + م = فہ (لا) فرلا ..... (۴)

اس لئے م = پہ (لا) اور



ب فدا (لا) فرلا = پیا (ب) - پیا (ا) ..... (۵)  
 تکملی احصا کا یہ بنیادی مسئلہ ہے۔ اس سے کسی معلومہ تفاعل فدا (لا)  
 کے محدود تکملہ کی قیمت دریافت کرنے کا مسئلہ مقلوب تفاعل پیا (لا)  
 یا عفتا فدا (لا) کے حاصل ہونے پر آسانی ہوتا ہے۔ اب اسکی وجہ  
 ظاہر ہے کہ اس مقلوب تفاعل کو اس شکل  
 ف فدا (لا) فرلا ..... (۶)

سے کیوں تعبیر کرتے ہیں۔ (۶) صرف ف فدا (لا) فرلا ..... (۷)  
 کا اختصار ہے جہاں ا اختیار ہے۔ ہم پہلے دیکھ چکے ہیں کہ ا میں کوئی  
 تبدیلی محض مشغل کو بدل دینے کے مرادف ہے۔

ترقیم [پیا (ب) ا] ..... (۸)  
 کو اکثر اوقات اختصار کے طور پر پیا (ب) - پیا (ا) کے لئے استعمال  
 کیا جاتا ہے۔

ب فدا (لا) فرلا ..... (۹)  
 مثال ۱۔

یہاں فدا (لا) = فو ک لا ، پیا (لا) = ا فو ک لا

پس ف فو ک لا فرلا = ا فو ک ب فو ک لا ..... (۱۰)

مثال ۲۔ ف جب لا فرلا ..... (۱۱)

یہاں فدا (لا) = جب لا ، پیا (لا) = ا ف جب لا

پس  $\frac{f}{g}$  جب لا فرلا =  $\frac{f}{g}$  ..... (۱۲)

۹۵۔ صورتیں تفاعل فم (لا) یا تکمل کے دو لا متناہی ہو جائیں۔

اور مثالوں پر غور کرنے سے پیشتر دفعہ ۹۴ کے تکملہ کی تعریف کو ذرا وسیع کرنا مناسب ہوگا۔ وہاں یہ مان لیا گیا تھا کہ تکمل کے محدود ا ب محدود ہیں

اور تفاعل فم (لا) تمام وسعت ب۔ ا میں محدود ہے۔ اب ہم دیکھینگے کہ بعض حالات میں ان شرائط کو ذرا دھیل کر دینا کیسے ممکن ہے

(آ) فرض کرو کہ فم (لا) لا کی تمام محدود قیمتوں کے لئے محدود اور مسلسل ہے۔

تکملہ  $\frac{f}{g}$  فم (لا) ..... (۱)

پر غور کرو جہاں صہ کے ا۔ اگر صہ کو لا انتہا بنانے سے تکملہ ایک معین انتہائی قیمت کی طرف مائل ہو تو اس انتہائی قیمت کو تکملہ

$\frac{f}{g}$  فم (لا) فرلا ..... (۲)

سے تعبیر کرتے ہیں اور تکملہ (۱) کو صہ کے لئے ”مستحق“ کہا جاتا ہے۔ جیسا کہ لا متناہی سلسلوں کے نظریہ سے یہ توقع کیجا سکتی ہے (دفعہ ۵) استدقاق کے لئے یہ کافی شرط نہیں ہے کہ

نہا  $\frac{f}{g}$  فم (لا) = ..... (۳)

نیز یہ شرط ضروری بھی نہیں ہے کیونکہ استدقاق اس صورت میں بھی ممکن ہو سکتا ہے جبکہ لا کے لئے فم (لا) کی کوئی معین انتہائی قیمت نہ ہو۔

اسی طرح کی تعریف  $\frac{f}{g}$  فم (لا) فرلا ..... (۴)

کے لئے بھی مرتبہ ہو سکتی ہے۔

(۴) فرض کرو کہ فہ (لا) لامتناہی ہوجاتا ہے تکمیل کے حدود پر یا ان کے

درمیان۔ صرف اُس صورت پر غور کرنا کافی ہوگا جہاں لا کی صرف ایک قیمت ہو جس کے لئے فہ (لا)  $\rightarrow \infty$ ۔ عام صورت اس صورت میں تخیل ہو سکتی ہے اگر سرعت ب۔ ا کو چھوٹے وقفوں میں توڑ دیا جائے۔

اگر فہ (لا) (صرف) اوپر کی حد پر لامتناہی ہوتا ہو تو ہم سب سے پہلے مکملہ

ب۔ صہ  
فہ (لا) فرلا ..... (۵)

پر غور کرتے ہیں جہاں صہ مثبت ہے۔ اگر صہ کو لامتناہی کم کرنے سے مکملہ ایک معین انتہائی قیمت کی طرف مائل ہو تو اس قیمت کو ہم تکملہ

ب۔ صہ (لا) فرلا کی تعریف قرار دیتے ہیں۔

اسی طرح کی تعریف اُس صورت پر حاوی ہوگی جہاں فہ (لا) پچلی حد پر لامتناہی ہوتا ہے۔

اگر فہ (لا) حدود لا ب کے درمیان لامتناہی ہوتا ہو مثلاً  
لا = ج کے لئے تو ہم اس مجموعہ پر غور کرتے ہیں

ج۔ صہ  
فہ (لا) فرلا + فہ (لا) فرلا ..... (۶)

اگر صہ (اور صہ) کے کم کرنے سے ان میں سے ہر ایک تکملہ ایک معین انتہائی قیمت کی طرف مائل ہو تو ان قیمتوں کے مجموعہ کو تکملہ

ب۔ صہ: ان لیا جاتا ہے کہ فہ (لا) اکیلے نقطوں کی محدود تعداد پر مبنی لامتناہی ہوتا ہے۔

$$+ \quad \text{فد (لا) فرلا} \dots \dots \dots (۷)^+$$

کی تعریف کے طور پر اختیار کر لیا جاتا ہے۔

جب 'فد (لا) تنہا نقطوں کی محدود تعداد پر لامتناہی یا غیر مسلسل ہو تو ایسی صورتوں کا استعمال یوں ہو سکتا ہے کہ محنت کو ایسے چھوٹے وقفوں میں تقسیم کیا جائے جن کا نقاط غیر مسلسل احاطہ کر لیں۔

$$\text{مثال ۱۔} \quad \text{فد (لا) فرلا} = \left[ \frac{1}{\text{فد (لا) فرلا}} - \frac{1}{\text{فد (لا) فرلا}} \right] = \frac{1}{\text{فد (لا) فرلا}} \dots (۸)$$

یہ سہ بڑھتا ہے یہ جلد انتہا  $\frac{1}{\text{فد (لا) فرلا}}$  کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اس لئے

$$\text{فد (لا) فرلا} = \frac{1}{\text{فد (لا) فرلا}} \dots (۹)$$

$$\text{مثال ۲۔} \quad \text{فد (لا) فرلا} = \left[ \text{لوک لا} \right] = \text{لوک سہ} \dots (۱۰)$$

یہ سہ کے ساتھ لامتناہی بڑھتا ہے۔ اس لئے سہ  $\infty$  کے لئے کوئی انتہائی

$$\text{نہیں ہے اگرچہ} \quad \text{فد (لا) فرلا} = \frac{1}{\text{فد (لا) فرلا}} \dots (۱۱)$$

+ ایسی صورتیں پیدا ہو سکتی ہیں جہاں ذیل کا ہر ایک تکملہ

$$\text{فد (لا) فرلا} \quad \text{فد (لا) فرلا} \quad \text{فد (لا) فرلا} \quad \text{فد (لا) فرلا}$$

آخر لامتناہی ہو لیکن اگر کوئی خاص شے انتہائی صفر ہونے والی مقداروں صہ صہ پر مانگا جائے تو ان دو تکملوں کے لامتناہی جزو اس طور پر ایک دوسرے کو خارج کر سکتے ہیں کہ مجموعہ محدود رہے۔ رشتہ مذکورہ اگر سہ = سہ ہو تو نتیجہ محصلہ کو جب

اسکا وجود کو مشی (Cauchy) تکملہ (۷) کی "صدری قیمت" کہا ہے۔

مثال ۳۔  $\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} = \frac{1}{1-\lambda}$  ..... (۱۲)

تفاعل  $\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}$  لاتناہی ہو جاتا ہے لہذا اس کے لئے۔ لیکن

$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} = \frac{1}{1-\lambda}$  ..... (۱۳)  
اور جیسے صد لاتناہی طور پر کم ہوتا ہے یہ جملہ انتہا ۲ کی طرف مائل ہوتا ہے۔

اس لئے  $\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} = 2$  ..... (۱۴)

مثال ۴۔  $\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} = \frac{1}{1-\lambda}$  ..... (۱۵)

$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} = \frac{1}{1-\lambda}$  ..... (۱۶)  
لیکن ہند ۴ (۵) سے نیا صد لوک صد =

اس لئے  $\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} = 1$  ..... (۱۷)

۹۶۔ دفعہ ۹ کے قاعدہ کا استعمال۔

محدود تکملوں کی قیمتیں دریافت کرنے کے چند اور مثالی سوال درج کئے جاتے ہیں۔

مثال ۱۔  $\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} = \frac{1}{1-\lambda}$  ..... (۱)

$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} = \frac{1}{1-\lambda}$  ..... (۲)

$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} = \frac{1}{1-\lambda}$  ..... (۳)

مثال ۲۔ دفعہ ۱ کی رو سے

$$\frac{\text{عما} + \text{بہا}}{\text{عما} + \text{بہا}} = \frac{\text{عما} + \text{بہا}}{\text{عما} + \text{بہا}}$$

اگر عہد شہت ہو تو جیسے سہ لا استنای کی طرف مائل ہوتا ہے آخری رقم اپنی انتہائی قیمت مفر کی طرف مائل ہوتی ہے۔ اس لئے

۲۱۷

اسی طرح

$$\frac{\text{عما} + \text{بہا}}{\text{عما} + \text{بہا}} = \frac{\text{عما} + \text{بہا}}{\text{عما} + \text{بہا}}$$

مثال ۳۔

$$\frac{\text{سن} - \text{سن}}{\text{سن} - \text{سن}} = \frac{\text{سن} - \text{سن}}{\text{سن} - \text{سن}}$$

تفاعل سن الا کثیر قیمت تفاعل نے (دفعہ ۱۶) لیکن یہ چندان آیت نہیں رکھتا کہ کوئی قیمت لی جائے بشرطیکہ ہم یہ فرض کر لیں کہ یہ یکساں طور پر بدلتا ہے جیسے لا تحمل کی سمت میں سے گذرتا ہے۔ اس لئے اگر لیا جائے سن = ۰۔ تو سن = سہ سے وہ قیمت مراد ہوگی جو یکساں طور پر۔ سے سہ تک بڑھتی ہے۔ جب سہ لا انتہا بڑھتا ہے تو یہ قیمت انتہا ۲ کی طرف مائل ہوتی ہے

اس لئے

$$\frac{\text{سن} - \text{سن}}{\text{سن} - \text{سن}} = \frac{\text{سن} - \text{سن}}{\text{سن} - \text{سن}}$$

مثال ۴۔ دفعہ ۸، (۴) کی رو سے

ب جیسے طہا۔ سے ۲ تک بڑھتا ہے،

$$\frac{\text{طہا}}{\text{طہا}} = \frac{\text{طہا}}{\text{طہا}}$$

بڑھتا ہے اور اسلئے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ مس ا  $\frac{ع}{ب}$  مس ط  $\frac{ا}{ب}$  [صفر سے  $\frac{۲}{۳}$  تک بڑھتا ہے۔

اس لئے  $\int \frac{۲}{۳} \frac{ع}{ب} \frac{ا}{ب} = \frac{۲}{۳} \frac{ع}{ب} \frac{ا}{ب} + \frac{۲}{۳} \frac{ع}{ب} \frac{ا}{ب} + \dots (۷)$   
طالب علم نے گذشتہ باب کی ضمن میں دیکھا ہو گا کہ جب متغیر کے بدلنے سے نامحدود تکمل عمل میں لایا جاتا ہے (دفعات ۷، ۹) تو عمل کا نہایت تکلیف دہ حصہ وہ ہوتا ہے جس میں ابتدائی متغیر کی طرف عود کیا جاتا ہے۔ جب معلومہ حدود درمیان محدود تکمل دریافت کرنا مقصود ہو تو عمل کا یہ حصہ غیر ضروری ہوتا ہے اور نامحدود تکملہ حاصل کر کے اس میں نئے حدود درج کر دینا کافی ہوتا ہے۔

مثال ۵۔  $\int \frac{۱}{۲} \frac{ا}{ب} \frac{ع}{ب} = \frac{۱}{۲} \frac{ا}{ب} \frac{ع}{ب} + \dots$  کو معلوم کر دو۔

دفعہ ۷ میں  $\frac{۱}{۲} = \frac{ا}{ب} \frac{ع}{ب}$  رکھنے سے حاصل ہوا

$\int \frac{۱}{۲} \frac{ا}{ب} \frac{ع}{ب} = \frac{۱}{۲} \frac{ا}{ب} \frac{ع}{ب} + \frac{۱}{۲} \frac{ا}{ب} \frac{ع}{ب} + \dots$  اب اگر  $\frac{ا}{ب} \frac{ع}{ب}$  سے  $\frac{۱}{۲}$  تک بدلتا تو  $\frac{۱}{۲}$  سے  $\frac{۱}{۲}$  تک بدلتا۔ اسلئے

$\int \frac{۱}{۲} \frac{ا}{ب} \frac{ع}{ب} = \frac{۱}{۲} \frac{ا}{ب} \frac{ع}{ب} + \frac{۱}{۲} \frac{ا}{ب} \frac{ع}{ب} + \dots (۹)$

۹۔ تحویلی ضابطے۔ دفعات ۸، ۸۲ کے طریقے جب محدود

تکمیلوں کی تحویل میں استعمال کئے جاتے ہیں تو تکمل شدہ رقوم کے دونوں حدود پر صفر ہو جانے سے خاص طور پر سادہ نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

(۱) اگر  $\frac{ا}{ب} \frac{ع}{ب} = \frac{۱}{۲} \frac{ا}{ب} \frac{ع}{ب} + \dots$  (۱)

تو دفعہ ۸۲ (۲) کی رو سے

$$ع = \left[ \frac{1}{n} \text{ جب } طما \text{ جم } طما \right] + \frac{1-n}{n} \dots (۲)$$

اگر  $n < 1$  تو پہلا حصہ صفر ہو جاتا ہے کیونکہ جب  $n = 0$ ،  $\frac{1}{0}$  =  $\infty$ ۔

$$\text{اس لئے } \frac{1}{n} \text{ جم } طما \text{ فرطما} = \frac{1-n}{n} \text{ جم } طما \text{ فرطما} \dots (۳)$$

اسی طرح سے دفعہ ۸۲ (۶) کی رو سے

$$\frac{1}{n} \text{ جب } طما \text{ فرطما} = \frac{1-n}{n} \text{ جب } طما \text{ فرطما} \dots (۴)$$

اگر  $n$  مثبت صحیح عدد ہو تو (۳) کے متوازن استعمال سے

$$\frac{1}{n} \text{ جم } طما \text{ فرطما}$$

$$\text{کو } \frac{1}{n} \text{ جم } طما \text{ فرطما} = 1 \text{ یا } \frac{1}{n} \text{ فرطما} = \frac{n}{1} \dots (۵)$$

کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے بموجب اس کے کہ  $n$  طاق ہو یا جفت۔

اسی طرح سے  $\frac{1}{n} \text{ جب } طما \text{ فرطما}$  کو

$$\frac{1}{n} \text{ جب } طما \text{ فرطما} = 1 \text{ یا } \frac{1}{n} \text{ فرطما} = \frac{n}{1} \dots (۶)$$

پنہمصر کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{مثال ۱۔ } \frac{1}{5} \text{ جم } طما \text{ فرطما} = \frac{4}{5} \text{ جم } طما \text{ فرطما}$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \text{ جم } طما \text{ فرطما} = \frac{4}{25}$$

اس طور پر دو تین مثالیں حل کر نیکی بعد طالب علم نتیجہ کے متوازن اجزاء ضروری کو زبان





$$(۱۳) \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{جب } \text{ط}^{\frac{n}{2}} \text{ جم } \text{ط}^{\frac{n}{2}} \text{ فرط} = \frac{1}{2} \quad , \quad \text{جب } \text{ط}^{\frac{n}{2}} \text{ فرط} = \frac{n}{2} \\ \text{جب } \text{ط}^{\frac{n}{2}} \text{ فرط} = 1 \quad , \quad \text{جب } \text{ط}^{\frac{n}{2}} \text{ جم } \text{ط}^{\frac{n}{2}} \text{ فرط} = 1 \end{array} \right.$$

مثال ۲- جب ط<sup>n/2</sup> جم ط<sup>n/2</sup> فرط =  $\frac{n}{2}$  جب ط<sup>n/2</sup> جم ط<sup>n/2</sup> فرط

$$= \frac{n}{2} \times \frac{1}{2} = \text{جب ط}^{\frac{n}{2}} \text{ جم ط}^{\frac{n}{2}} \text{ فرط}$$

(۱۲) کی رو سے - نیز (۱۱) سے

$$\text{جب ط}^{\frac{n}{2}} \text{ جم ط}^{\frac{n}{2}} \text{ فرط} = \frac{n}{2} \quad \text{جب ط}^{\frac{n}{2}} \text{ جم ط}^{\frac{n}{2}} \text{ فرط} = \frac{n}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\text{اس لئے } \text{جب ط}^{\frac{n}{2}} \text{ جم ط}^{\frac{n}{2}} \text{ فرط} = \frac{n}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2^5}$$

تھوڑی شق کے بعد جواب فوراً لکھا جاسکیگا۔ مثلاً

$$\text{جب ط}^{\frac{n}{2}} \text{ جم ط}^{\frac{n}{2}} \text{ فرط} = \frac{n}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2^6}$$

ضابطوں (۱۱) اور (۱۲) نیز (۱۳) اور (۱۴) کی عملی شقوں میں ضرورت ہوتی ہے۔ ان کو یاد رکھنا مناسب ہے۔

نیز صبری تکملہ  $\int (1-x)^n dx$  فرلا ..... (۱۴)

میں رکھو لا = جب ط<sup>n</sup> تو اس کی یہ صورت ہو جاتی ہے

$$\int \text{جب } \text{ط}^{1+2} \text{ جم } \text{ط}^{1+2} \text{ فرط} \dots (۱۵)$$

اسکی قیمت اوپر کے ضابطوں سے لگی جاسکتی ہے جب کسی ۱+۲ ۱+۲ ۱+۲ ۱+۲ + ۱ مثبت صحیح عدد ہوں یا منفی ہوں۔

اسی طرح تکملہ  $^1\text{ل} (1-ا) (لا) ^2\text{فرلا}$  ..... (۱۶)  
میں رکھو لا = جب  $^1\text{ل}$  تکملہ  $^2\text{فرلا}$  شکل اختیار کرتا ہے

$^2\text{فرلا}$  جب  $^1\text{ل}$  تکملہ  $^3\text{فرلا}$  ..... (۱۷)

مثال ۳-  $^1\text{ل} (1-ا) (لا) ^2\text{فرلا} = ^3\text{فرلا}$  جب  $^1\text{ل}$  تکملہ  $^2\text{فرلا}$

$$\frac{17}{315} = 1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{9} \times 2 =$$

مثال ۴-  $^1\text{ل} (1-ا) (لا) ^2\text{فرلا} = ^3\text{فرلا}$  جب  $^1\text{ل}$  تکملہ  $^2\text{فرلا}$  ..... (۱۸)

۹۸- مربوطہ تکملے - محدود تکملوں کے متعلق کئی مسئلے ہیں جو دفعہ ۸۹ کی تعریف کے تحت وجدانی طور پر حاصل ہوتے ہیں مثلاً

$^1\text{ل} (1-ا) (لا) ^2\text{فرلا} = ^3\text{فرلا}$  ..... (۱)

اس کے ثبوت کے لئے لکھو لا = ۱ - لا  $^1\text{ل}$  تکملہ  $^2\text{فرلا}$  کے حدود ہیں  
لا = ۰، لا = ۱ کے جواب میں لا = ۱، لا = ۰ بالترتیب - پس

$^1\text{ل} (1-ا) (لا) ^2\text{فرلا} = ^3\text{فرلا}$  جب  $^1\text{ل}$  تکملہ  $^2\text{فرلا}$

آخر میں زیرِ نکال دیا گیا کہ اس کی ضرورت نہیں -  
اوپر کا عمل صواب کو نقطہ لا = ۱ پر لجا کر محور لا کی سمت کو بدل دینے  
مرادف ہے، اس طور پر معلوم ہو گا کہ (۱) سے جو رقبے تعبیر ہوتے ہیں وہ  
مثال ہیں -

(۱) کی ضروری شکل یہ ہے

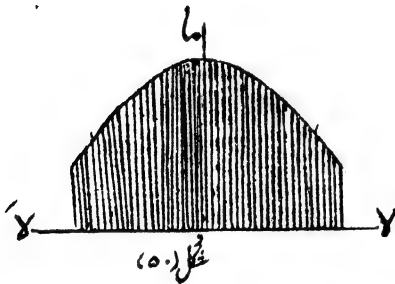
$$\int f(x) dx = \int f(x) dx \quad (2)$$

$$\text{مثال ۱۔} \quad \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\text{پس ہر ایک تکملہ} \quad \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$\text{اگر } f(x) = (x-1) \text{ کا بخت تفاعل ہو یعنی } f(x) = (x-1) \text{ ..... (3)}$$

$$\text{تو} \quad \int f(x) dx = \int (x-1) dx = \frac{x^2}{2} - x + C \quad (4)$$



شکل (۵۰)

پہلے تکملہ سے جو رقبہ تبصیر  
ہوتا ہے سرکھا اس کی تفسیر

محور صاف سے ہوتی ہے۔

برعکس اس کے اگر  $f(x) = (x-1)$

لا کا طاق تفاعل ہو یعنی

$f(x) = (x-1) = - (1-x)$  ..... (5)

$$\text{تو} \quad \int f(x) dx = \int (x-1) dx = \frac{x^2}{2} - x + C \quad (6)$$

کیونکہ اس مجموعہ میں سبکی اتہایہ محو

تکملہ ہے (دفعہ ۱۹)

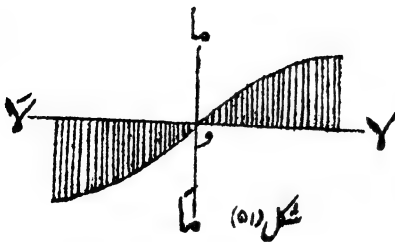
جزو  $f(x) = (x-1)$  مف لا

اور متقابل کی علامت والا جزو

$f(x) = (x-1)$  مف لا

دونوں ملکر ایک دوسرے کے

ساقط کرتے ہیں۔



شکل (۵۱)

مثال ۲-  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ} \text{جم}^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ} \text{فرطہ} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ} \text{جم}^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ} \text{فرطہ}$

$$\frac{\pi}{15} = 1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times 2 =$$

اور  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ} \text{جم}^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ} \text{فرطہ} =$  کیونکہ جب طہ طہ کے ساتھ علامت بدلتا ہے۔

ایسی ہی وجوہات کی بنا پر اگر  $\text{فہ} (1-2) = \text{فہ} (2-1) \dots \dots (4)$

تو  $\int_0^1 \text{فہ} (2-1) \text{فرلا} = 2 \int_0^1 \text{فہ} (1-2) \text{فرلا} \dots \dots (8)$

لیکن اگر  $\text{فہ} (1-2) = - \text{فہ} (2-1) \dots \dots (9)$

تو  $\int_0^1 \text{فہ} (2-1) \text{فرلا} = \dots \dots (10)$

(۸) کی خاص صورت کے طور پر ہم حاصل کرتے ہیں

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{فہ} (\text{جب}^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ}) \text{فرطہ} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{فہ} (\text{جب}^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ}) \text{فرطہ} \dots (11)$

کیونکہ جب  $(\pi - \text{طہ}) = \text{جب}^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ}$

مثال ۳-  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ} \text{جم}^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ} \text{فرطہ} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ} \text{جم}^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ} \text{فرطہ}$  ۲۲۲

$$\frac{\pi}{15} = 1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times 2 =$$

اور  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جب}^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ} \text{جم}^{\frac{\pi}{2}} \text{طہ} \text{فرطہ} =$

امثلہ ۳

۱- دقتہ مثال کے طریقہ سے ثابت کرو کہ  $\int_0^1 \text{لا} \text{فرلا} = \frac{1}{4} (\text{ب} - \text{ا})$

- ۲- ابتدائی اصولوں کی بنا پر ثابت کرو کہ  $\int \text{جم لا فرلا} = \text{جب بجا جب ص}$
- ۳- نیز ثابت کرو کہ  $\int \text{فو ک لا فرلا} = \frac{\text{فو ک ب} - \text{فو ک}}{\text{ک}}$
- ۴- شریعی تخیلات کی بنا پر دکھاؤ کہ

- $\int \text{ک فدا (لا) فرلا} = \text{ک} \int \text{فدا (لا) فرلا}$
- $\int \text{ک فدا لا فرلا} = \int \text{فدا (لا + لا) فرلا} = \int \text{فدا ک (لا) فرلا} = \int \text{فدا ک (لا) فرلا} = \int \text{فدا ک (لا) فرلا}$
- ۵- ثابت کرو کہ  $\int \text{فدا (لا) فرلا} = \int \text{فدا (لا + ب) فرلا}$
- ۶- اگر ن اور پ مثبت صحیح عدد ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\int \text{نیا} = \left( \frac{1}{ن} + \frac{1}{ن+1} + \frac{1}{ن+2} + \dots + \frac{1}{ن+پ} \right) = \int \text{لوک پ}$$

### مثله ۳۳

- ۱-  $\int \text{لا لا فرلا} = \frac{۲}{۲} = ۱$ ،  $\int \text{لا فرلا} = \frac{۲}{۲} = ۱$ ،  $\int \text{لا فرلا} = \frac{۲}{۲} = ۱$
- ۲-  $\int \text{لا فرلا} = \frac{۲}{۲} = ۱$ ،  $\int \text{لا فرلا} = \frac{۲}{۲} = ۱$
- ۳-  $\int \text{لا فرلا} = \frac{۲}{۲} = ۱$
- ۴-  $\int \text{لا فرلا} = \frac{۲}{۲} = ۱$

$$-۵ \quad \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا+۱)} = \text{لوک} (۲+۱) \quad \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا-۱)} = \text{لوک} (۲+۱)$$

$$-۶ \quad \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا+۱)} = \text{لوک} ۲ \quad \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا+۱)} = \frac{۱}{۲} \text{لوک} ۲$$

$$-۷ \quad \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا-۱)} = \frac{\pi^2}{۳۱۲}$$

$$-۸ \quad \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا+۱)} = ۱ - \frac{\pi}{۲}$$

$$-۹ \quad \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا+۱)(لا+۲)} = \frac{\pi}{۲(۱+۲)}$$

$$-۱۰ \quad \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا+۱)(لا+۲)} = \frac{\pi}{۲(۱+۲)}$$

$$-۱۱ \quad \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا+۱)(لا+۲)} = \frac{۱}{۲} \text{لوک} \frac{۱}{ب}$$

$$-۱۲ \quad \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا+۱)} = ۱ - \text{لوک} ۲ \quad \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا+۱)} = \frac{۱}{۲} - \text{لوک} ۲$$

$$-۱۳ \quad \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا+۱)} = \frac{\pi}{۲}$$

$$-۱۴ \quad \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا-۱)} = \frac{\pi}{۲} \quad \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا+۱)} = \text{لوک} (۲+۱)$$

$$-۱۵ \quad \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا-۱)} = \pi \quad \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا-۱)} = \frac{\pi}{۲}$$

$$-۱۶ \quad \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا+۱)} = \frac{\pi}{۲} \quad \int_1^{\infty} \frac{فرلا}{(لا+۱)} = \frac{\pi}{۲}$$

$$x_{18} \quad \int \left[ \frac{(b-a)}{(a-b)} \right] \sqrt{a} = \int \left[ \frac{(a-b)}{(b-a)} \right] \sqrt{a} = \frac{1}{2} \pi (b-a) \quad -18$$

$$\int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 \quad \int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 - \frac{\pi}{4} \quad -19$$

$$\int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 \quad \int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 - \frac{\pi}{4} \quad -20$$

$$\int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad -21$$

$$\int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad -22$$

۲۲۵

$$\int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad -23$$

$$\int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad -24$$

$$\int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad -25$$

$$\int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad -26$$

$$\int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad -27$$

$$\int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad -28$$

$$\int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \int \sqrt{a} \sqrt{a} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad -29$$



$$۳۰ - \text{ثم } \text{طه} \text{ جب } \text{طه} \text{ فرطه} = ۱, \text{ ثم } \text{طه} \text{ جم } \text{طه} \text{ فرطه} = ۱ - \frac{\pi}{2}$$

$$۳۱ - \text{ثم } \text{طه} \text{ جب } \text{طه} \text{ فرطه} = ۲ - \pi, \text{ ثم } \text{طه} \text{ جم } \text{طه} \text{ فرطه} = ۲ - \frac{\pi}{2}$$

$$۳۲ - \text{ثم } \text{طه} (\pi - \text{طه}) \text{ جب } \text{طه} \text{ فرطه} = ۴, \text{ ثم } \text{طه} (\pi - \text{طه}) \text{ جم } \text{طه} \text{ فرطه} =$$

$$۳۳ - \text{ثم } (۱ - \text{لا}) \text{ جم } \text{به} \text{ لا} \text{ فرلا} = \frac{\pi}{2} \text{ (جب به} - \text{به} \text{ جم به)}$$

$$۳۴ - \text{ثم } \frac{\text{لا} \text{ سن } \text{لا}}{(۱ + \text{لا})^2} \text{ فرلا} = \frac{\pi}{8} \quad \text{فرلا} = \frac{۱}{(۱ + \text{لا})^2} \quad \text{فرلا} = \frac{۱}{(۱ + \text{لا})^2}$$

$$۳۵ - \text{ثم } \frac{\sqrt{۱ - \text{لا}}}{۱ - \text{لا}} \text{ فرلا} = \{ ۱ - \text{لا} \} \text{ بشرطه } ۱ < ۱$$

$$۳۶ - \text{ثم } \text{طه} \text{ قط } \text{طه} \text{ فرطه} = \frac{\pi}{2} - \frac{۱}{2} \text{ لوک } ۲$$

$$۳۷ - \text{ثم } \text{قولا} \text{ جم } (\text{لا} + \frac{\pi}{2}) \text{ فرلا} = ۰$$

$$۳۸ - \text{ثم } \frac{\text{فرع}}{\text{جمزع}} = \pi = \text{نور}$$

$$۳۹ - \text{ثم } \frac{\text{فرلا}}{\text{لا} + \text{قولا} + \text{ب} \text{ قولا}} = \frac{۱}{\text{ب} \text{ سن } \text{ا} \text{ ب}}$$

$$۴۰ - \text{ثم } \frac{\text{فرلا}}{\text{لا} + \text{ب} \text{ جنرلا}} = \frac{۱}{\text{ب} \text{ سن } \text{ا} \text{ ب}}$$

$$۴۱ - \text{ثم } \frac{\text{علا} \text{ فرلا}}{\text{علا} - ۱} = \frac{\text{جم } \text{علا}}{\text{جمزع } \text{علا}} \text{ برب اسکه علا} > ۱$$

$$-۲۲- \quad \frac{\text{فرطہ}}{\text{جنرۂ عہ - جم طہ}} = \frac{\text{فرطہ}}{\text{جنرۂ عہ - جم طہ}} \quad \frac{\text{جم طہ فرطہ}}{\text{جم طہ - جنرۂ عہ}} = \frac{\text{جم طہ فرطہ}}{\text{جم طہ - جنرۂ عہ}}$$

امثلہ ۳۳  
(تحویلی ضابطے وغیرہ)

۱۔ ذیل کے تکملوں کی قیمتیں لکھو

(۱)  $\frac{\text{جم طہ فرطہ}}{\text{جم طہ - جنرۂ عہ}} = \frac{\text{جم طہ فرطہ}}{\text{جم طہ - جنرۂ عہ}}$

(۲)  $\frac{\text{جم طہ فرطہ}}{\text{جم طہ - جنرۂ عہ}} = \frac{\text{جم طہ فرطہ}}{\text{جم طہ - جنرۂ عہ}}$

$\frac{\text{جم طہ فرطہ}}{\text{جم طہ - جنرۂ عہ}}$

(۳)  $\frac{\text{جم طہ فرطہ}}{\text{جم طہ - جنرۂ عہ}} = \frac{\text{جم طہ فرطہ}}{\text{جم طہ - جنرۂ عہ}}$

(۴)  $\frac{\text{جم طہ فرطہ}}{\text{جم طہ - جنرۂ عہ}} = \frac{\text{جم طہ فرطہ}}{\text{جم طہ - جنرۂ عہ}}$

$\frac{\text{جم طہ فرطہ}}{\text{جم طہ - جنرۂ عہ}} = \frac{\text{جم طہ فرطہ}}{\text{جم طہ - جنرۂ عہ}}$

۲۔ ابتدائی اصولوں سے ثابت کرو کہ

$\frac{\text{جم طہ فرطہ}}{\text{جم طہ - جنرۂ عہ}} = \frac{\text{جم طہ فرطہ}}{\text{جم طہ - جنرۂ عہ}}$

$\frac{\text{جم طہ فرطہ}}{\text{جم طہ - جنرۂ عہ}} = \frac{\text{جم طہ فرطہ}}{\text{جم طہ - جنرۂ عہ}}$

ثابت کرو کہ انکی مشترک قیمت ہے

۳- ثنابت کروکہ  $\int \text{فہ} (لا^۱) \text{فرلا} = ۲ \int \text{فہ} (لا^۱) \text{فرلا}^۲$

$\int \text{فہ} (لا^۱) \text{لا فرلا} = ۰$

۴- ثنابت کروکہ  $\int \text{فہ} (لا) \text{فرلا} = \int [\text{فہ} (لا) + \text{فہ} (لا) \text{فرلا}] \text{فرلا}$

اور  $\int [\text{فہ} (لا) - \text{فہ} (لا) \text{فرلا}] \text{فرلا} = ۰$

۵- اگر عین  $\int \text{مسٹن} \text{طہ} \text{فرطہ} \text{تو ثنابت کروکہ عین} = \frac{۱}{۱-۱} - \frac{۱}{۱-۱} = ۰$

۶-  $\int لا^۲ (لا^۱) \text{فرلا} = \frac{۲}{۱۲}$

۷-  $\int لا^۲ (لا^۱) \text{فرلا} = \frac{۱}{۱۲۰}$

۸-  $\int لا^۲ (لا^۱) \text{فرلا} = \frac{\pi^۳}{۱۲۸}$

۹-  $\int \frac{لا^۵ \text{فرلا}}{لا^۲ - ۱} = \frac{۸}{۱۵}$  ،  $\int \frac{لا^۵ \text{فرلا}}{لا^۲ - ۱} = \frac{۵}{۳۲}$

۱۰-  $\int \text{طہ} \text{جب} \text{طہ} \text{جم} \text{طہ} \text{فرطہ} = \frac{\pi}{۲}$  ،  $\int \text{طہ} \text{جب} \text{طہ} \text{فرطہ} = \frac{\pi}{۲}$

۱۱-  $\int \text{طہ} \text{جب} \text{طہ} \text{جم} \text{طہ} \text{فرطہ} = \frac{\pi}{۳}$  ،  $\int \text{طہ} \text{جب} \text{طہ} \text{جم} \text{طہ} \text{فرطہ} = \frac{\pi}{۳}$

۱۲-  $\int \frac{\text{جب} ۲ \text{طہ}}{\text{جب} ۲ \text{طہ}} \text{فرطہ} = \frac{\pi}{۲}$  ،  $\int \frac{\text{جب} ۲ \text{طہ}}{\text{جب} ۲ \text{طہ}} \text{فرطہ} = \frac{۳}{۴}$

$\int \frac{\text{جب} ۲ \text{طہ}}{\text{جب} ۲ \text{طہ}} \text{فرطہ} = \frac{\pi}{۴}$

$$۱۳- \int_0^{\infty} (ا ج ب ط ه + ب ج م ط ه) فرط ه = \frac{۱۶}{۱۵} ا + \frac{۱}{۳} ا ب + ا ب ج$$

$$۱۴- \int_0^{\infty} \frac{ج م لا - ج ب لا}{ا + ج ب لا ج م لا} فرلا =$$

$$۱۵- ثابت کروکه \int_0^{\infty} \frac{ج م ط ه فرط ه}{ا ج م ط ه + ب ا ج ب ط ه} = \frac{۲}{(ا + ب) (ا + ب)}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{ج ب ط ه فرط ه}{ا ج م ط ه + ب ا ج ب ط ه} = \frac{۲}{ب (ا + ب)}$$

$$۱۶- ثابت کروکه \int_0^{\infty} (ا + لا) (ا - لا) فرلا =$$

$$۲ = \int_0^{\infty} ج ب ط ه^{۱+۲} ج م ط ه^{۱+۲} فرط ه$$

$$۱۷- ثابت کروکه \int_0^{\infty} \frac{فرلا}{(ا + لا) (ا - لا)}$$

$$۱۸- اگر ن مثبت صح عدد ہو تو ثابت کروکه \int_0^{\infty} \frac{فرلا}{(ا - لا) (ا + لا)} = \frac{۳ - ن}{۲ - ن} [ رکھ لا = مس ما ]$$

$$۱۹- اگر ن < ا تو ثابت کروکه \int_0^{\infty} \frac{فرلا}{(ا + لا) (ا - لا)} = \frac{۲ \times ۳ \times ۴ \times \dots \times (ن - ۲)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times (ن - ۱)}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{فرلا}{(ا + لا) (ا - لا)} = \frac{ن}{ا - ن} رکھ لا = جنز ع$$

$$۲۰- ثابت کروکه \int_0^{\infty} \frac{فرع}{ج م ن ع} = \frac{ن - ۲}{ا - ن} فرع [ رکھ جنز ع = ق ط ط ه ]$$

۲۱۔ اگر  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n(n-1)}$  ثابت کرو کہ  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n(n-1)}$  ثابت کرو کہ  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n(n-1)}$

۲۲۔ اگر  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n(n-1)}$  ثابت کرو کہ  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n(n-1)}$

ہندسی طریق پر کسی اور طرح سے جو کی قیمت دریافت کرو اور عم، عم کی قیمتیں مستنبط کرو۔

### امثلہ ۳۳

۱۔  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n(n-1)}$  ثابت کرو کہ اگر  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n(n-1)}$  صحیح عدد ہو تو

$$\frac{(2-n)(1-n)n}{2 \times 3 \times 2 \times 1} - \frac{(1-n)n}{5 \times 2 \times 1} + \frac{n}{3 \times 1} - \frac{n}{2 \times 1} + \dots = \dots$$

۲۔ اگر  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n(n-1)}$  ثابت کرو کہ  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n(n-1)}$

۳۔ اگر  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n(n-1)}$  ثابت کرو کہ  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n(n-1)}$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n(n-1)}$$

۴۔ ثابت کرو کہ  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n(n-1)}$



جو ایک سے کم ہے اور

نہی<sup>۱</sup> لا<sup>۱</sup> ف<sup>۱</sup> (لا) محدود ہے۔ [رکھو لا = ت<sup>۱</sup>]

۱۰۔ اگر ف<sup>۱</sup> (لا) محدود اور مسلسل ہو لا کی تمام قیمتوں کے لئے تو مکملہ

ج<sup>۱</sup> ف<sup>۱</sup> (لا) فرلا محدود ہوگا بشرطیکہ ایک مقدار م ایسی مل سکتی ہو ایک بڑی ہے

اور نہی<sup>۱</sup> لا<sup>۱</sup> ف<sup>۱</sup> (لا) محدود ہے۔ [رکھو لا = ت<sup>۱</sup>]

۱۱۔ ثابت کر دو کہ

ج<sup>۱</sup> جم لا<sup>۱</sup> فرلا اور ج<sup>۱</sup> جب لا<sup>۱</sup> فرلا

محدود اور قابل تعین ہیں۔

۱۲۔ ثابت کر دو کہ ج<sup>۱</sup> لا<sup>۱</sup> قو<sup>۱</sup> فرلا =  $\frac{1}{p}$  ج<sup>۱</sup> لا<sup>۱</sup> قو<sup>۱</sup> فرلا =

۱۳۔ ثابت کر دو کہ مکملہ

ج<sup>۱</sup> لا<sup>۱</sup> قو<sup>۱</sup> فرلا (جہاں ن < ۱)

محدود اور قابل تعین ہے۔

۱۴۔ اگر ن < ۱ تو ثابت کر دو کہ

ج<sup>۱</sup> لا<sup>۱</sup> قو<sup>۱</sup> فرلا =  $\frac{1}{p} (ن-۱)$  ج<sup>۱</sup> لا<sup>۱</sup> قو<sup>۱</sup> فرلا

اگر ن مثبت صحیح عدد ہے تو

ج<sup>۱</sup> لا<sup>۱</sup> قو<sup>۱</sup> فرلا =  $\frac{1}{p} (ن+۱-۱)$  ج<sup>۱</sup> لا<sup>۱</sup> قو<sup>۱</sup> فرلا

۱۵۔ اگر ج<sup>۱</sup> لا<sup>۱</sup> قو<sup>۱</sup> فرلا تو ثابت کر دو کہ ج<sup>۱</sup> لا<sup>۱</sup> قو<sup>۱</sup> فرلا =  $\frac{ن}{ن+۱}$  ج<sup>۱</sup> لا<sup>۱</sup> قو<sup>۱</sup> فرلا

جہاں ن مثبت ہے۔ اس لئے ثابت کرو کہ اگر ن صحیح عدد ہو تو

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{0} = 0 - \infty = -\infty$$

۱۶۔ ناقصی تکملہ  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$  کی جدولیں زاویہ کے منٹ کے

فرق پر فہ کی قیمتوں کے لئے مرتب کی گئی ہیں۔ جدول کے کسی حصہ میں متوازنہ راجوں کے فرق کے لئے ضابطہ حاصل کرو۔

مثلاً اگر  $k = \frac{1}{4}$ ،  $\phi = 90^\circ$  تو ثابت کرو کہ فرق تقریباً ۳۲۳... ہو گا۔

۱۷۔ اگر  $f$  (لا) اور  $f$  (لا) محدود اور مسلسل ہوں اور  $f$  (لا) کی تمام دفعہ (لا) سے (لا) = ب تک، وہی علامت رہے تو

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx$$

جہاں  $k < 1$ ۔

۱۸۔ یہ بتاؤ کہ  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{0} = 0 - \infty = -\infty$  سے یہ کیونکر حاصل ہوتا ہے ۲۳۱

کہ موسیقی سلسلہ  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$  کی ن رقموں کا مجموعہ لوگ (۱ + ن) اور ۱ + لوگ ن کے درمیان واقع ہے۔

ثابت کرو کہ اس سلسلہ کی دس لاکھ رقموں کا مجموعہ ۸ و ۱۳ اور ۸ و ۱۴ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۱۹۔ ترکیبی اصولوں کی بنا پر دکھاؤ کہ اگر  $f$  (لا) استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے جیسے لا، سے  $\infty$  تک بڑھتا ہے تو سلسلہ

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots$$



مستقل ہے اور اس کا مجموعہ ت اورت + ف (د) کے درمیان واقع ہوتا ہے  
بیشک یہ تکملہ ت =  $\sum f (لا) فرلا$  محدود ہو۔ اس کو سلسلہ

$$..... + \frac{1}{(۳+ن)} + \frac{1}{(۲+ن)} + \frac{1}{(۱+ن)}$$

### امثلہ ۳۵

- ۱۔ اگر ایک گیس کا دباؤ (د) ہو اور حجم (ح) اور ان میں تعلق ہو د ح = مستقل  
تو حجم ح سے ح تک پھیلنے میں کام و ج لوک  $\frac{ح}{د}$  ہوگا۔
- ۲۔ اگر اس میں رشتہ د ح جما = مستقل ہو تو کام ہوگا

$$\frac{1}{جما} - (د ح - د ح)$$

- ۳۔ ایک پچکد ارسی کا تناؤ ایسے بدلتا ہے جیسے طبعی طول پر اس کا اضافہ۔  
ایک طول سے دوسرے طول تک زمینی کو کھینچ کر ناپسنے میں جو کام کیا جاتا ہے وہ وہی  
ہے گویا تناؤ مستقل ہے اور اس کے ابتدائی اور آخری تناؤں کے نصف مجموعہ کے  
ساوی ہے۔
- ۴۔ ایک یونٹ کو لاتنا ہی فاصلہ سے سطح زمین تک لانے میں جاذبہ ارض جو کام کرتی ہے  
وہ ن فٹ 'یونٹ کے مساوی ہے جہاں زمین کا نصف قطر ن فٹ ہے۔ (یہ  
مان لو کہ قوت جاذبہ زمین کے مرکز سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے)

# ط آمھواں با

## ہندی استعمال

۹۹۔ رقبہ کی تعریف - اصول اقلیدس میں ایسے سائل

ثابت کئے گئے ہیں جن سے اصطلاح ”رقبہ“ کا ٹھیک مفہوم متعین ہوتا ہے مگر صرف اس صورت میں جبکہ اشکال بالتمام خطوط مستقیم سے گھری ہوئی ہوں۔ بالخصوص یہ ثابت کیا گیا ہے کہ ایک مستطیل کسی دی ہوئی شکل کے مساوی ایک دے ہوئے قاعدہ پر بنایا جاسکتا ہے، یہ قاعدہ کوئی اختیار کی طول ہو سکتا ہے مثلاً طول کی اکائی۔ اس شکل کا رقبہ اس نسبت کے ناپ سے تعبیر ہوگا جو اس مستطیل کو اکائی طول والے ایک مربع کے ساتھ ہے۔ اس عمل کا اطلاق ایسی شکل پر نہیں ہو سکتا جو پورے یا جزوی طور پر

منحنی خطوط سے گھری ہوئی ہو۔ اس لئے ہمیں دیکھنا ہے کہ ایسی صورت میں ”رقبہ“ کے مفہوم کی تعریف کیا اختیار کی جائے۔ اسے حاصل کرنے کے لئے ہم فرض کرتے ہیں کہ دو مستقیم الاضلاع شکلیں بنائی گئی ہیں ایک منحنی شکل کے باہر اور دوسری اس کے اندر پہلی شکل کے اندر یعنی رقبہ شامل ہوتا ہے اور دوسری اس منحنی رقبہ کے اندر واقع ہوتی ہے۔ اندرونی شکل کے رقبہ کے لئے اوپر کی انتہا ہے اور بیرونی شکل کے لئے نیچلی انتہا ہے۔ یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ یہ دونوں انتہا میں منطابق ہیں۔ اس مسئلہ کی انتہائی قیمت کو اردوئے تعریف دی ہوئی ”منحنی الاضلاع شکل کے“ رقبہ کا ناپ اختیار کیا جاتا ہے۔

مثلاً دائرہ کی صورت میں (دیکھو شکل ۱، دفعہ ۱) اگر  $n$  ق اندرونی  
 کثیر الاضلاع کا ضلع ہو تو کثیر الاضلاع کا رقبہ  $\frac{1}{2} \times \text{ول} \times n$  ق ہوگا۔  
 اب  $\text{ول}$  نصف قطر سے کم ہے اور  $n$  ق دائرہ کے محیط سے  
 کم ہے۔ اس لئے اندر بنے ہوئے کثیر الاضلاع کے رقبہ کی اوپر کی انتہا  
 $\frac{1}{2} \times \pi \times r^2$  دیا  $\pi$  اس سے بڑھ نہیں سکتی جہاں دائرہ کا نیم قطر ہے۔ اسی طرح  
 ثابت ہو سکتا ہے کہ بیرونی کثیر الاضلاع کے رقبہ کی نیچلی انتہا  $\pi$  اس سے کم نہیں  
 ہو سکتی۔ علاوہ اس کے اندرونی اور متناظر بیرونی کثیر الاضلاعوں کے رقبوں کا  
 فرق ہے  $n \times \text{ول} \times t$  اور یہ کم ہے  $\frac{1}{2} \times (n \times \text{ول}) \times \text{صہ}$  سے  
 جہاں  $\text{صہ}$   $t$  کی بڑی سے بڑی قیمت ہے۔ چونکہ یہ اس قدر چھوٹی  
 بنائی جاسکتی ہے جقدر ہم چاہیں اس لئے مذکورہ بالا اوپر کی اور نیچلی انتہائیں مساوی  
 ہیں، اس لئے ہر ایک  $\pi$  اس کے مساوی ہے۔  
 اسی طور پر ثابت ہو سکتا ہے کہ نیم قطر کے کسی دائرہ کے قطع کا رقبہ  
 $\frac{1}{2} \times \text{طما}$  ہے جہاں  $\text{طما}$  قطع کا زاویہ ہے۔

۱۰۰۔ کارٹیزی محدودوں میں رقبہ کے لئے ضابطہ۔ ۲۳۲

اگر کارٹیزی محدودوں میں منحنی کی مساوات

ما = فم (لا) ..... (۱)

ہو تو منحنی 'محور' لا اور معینوں لا = ل، لا = ب کے درمیان گھرا ہوا رقبہ

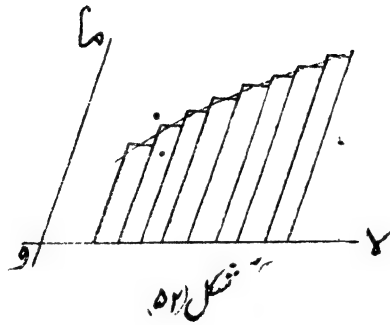
ب فم (لا) فر لا یا ل ما فر لا ..... (۲)

تسلیم کر لیا گیا ہے کہ فم (لا) اس نوز کا تفاضل ہے جسکا دفعہ ۹۰ میں ذکر کیا گیا نتیجہ بالا  
 پہلے دفعہ کی تعریف اور دفعہ ۹۰ کی تحقیق سے فوراً اخذ ہو جاتا ہے۔ اگرچہ مثال ہوں اور ایک  
 دوسرے کے ساتھ زاویہ مساوی بنائیں تو غصہ ہی غصیل مامف لا کی بجائے جو غم جو غم  
 واقع ہوتے ہیں اور انکی انتہا رقبہ ہے غصہ ہی متوازی الاضلاع مامف لا جب مساوی  
 ہونے۔ رقبہ جو غصہ، محور لا اور احاطہ کرنے والے دو معینوں کے درمیان

گھرا ہوا ہے اب ہوگا

جب سہ  $\int$  مافرلا ..... (۳)

جسے دے ہوئے خاص حدود کے درمیان لینا چاہئے۔



مثال ۱۔ ناقص  $\frac{2}{1} + \frac{2}{2} = 1$  ..... (۱)  
کے رقبہ کا رقبہ دریافت کرو۔

رقبہ مطلوبہ =  $\int$  مافرلا =  $\frac{2}{1} \int$  مافرلا -  $\frac{1}{2} \int$  مافرلا = اس

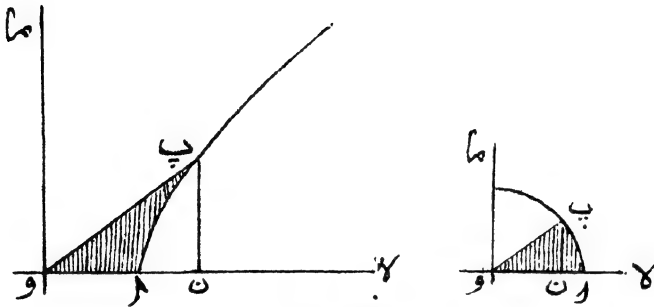
محدود تکملہ کی قیمت دفعہ ۹۶ میں معلوم کی گئی تھی۔ نوٹ مرن  $\int$  مافرلا =  $\frac{1}{2} \int$  مافرلا =  $\frac{1}{2} \int$  مافرلا = اس  
اس لئے کل ناقص کا رقبہ =  $\frac{1}{2} \int$  مافرلا =  $\frac{1}{2} \int$  مافرلا =  $\frac{1}{2} \int$  مافرلا = (۵)

مثال ۲۔ قائم زائد  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$  ..... (۵)  
کی مثبت شاخ کے لئے رکھو  $\frac{1}{2} =$  جنم ع،  $\frac{1}{2} =$  جنم ع = جنم ع ..... (۶)

کیونکہ یہ (۵) کو پورا کرتی ہیں اور ایسے  $\frac{1}{2}$  مافرلا کی قیمتوں کی مطلوبہ سعت پوری ہوتی ہے  
یعنی محور لا اور اس میں کے درمیان کا رقبہ جس کا تعین تنفیہ ع سے ہوتا ہے  
 $\int$  مافرلا =  $\int$  جنم ع فرع =  $\frac{1}{2} \int$  (جنم ع - ۱) فرع

$$(۷) \dots\dots\dots \frac{1}{۳} = \frac{۱}{۲} - ۰.۵۲۶ \dots\dots\dots (۷)$$

ہے۔



شکل ۵۳

(۷) سے بائیں جانب کی شکل میں پ ان کا رقبہ حاصل ہوتا ہے۔  
اس لئے زائدی قطع و اپ کا رقبہ ہے

$\frac{1}{۳} \times \text{پ ن} \times \text{ون} - \text{رقبہ پ ان} = \frac{1}{۳} \times ۰.۵۲۶ \dots\dots\dots (۸)$   
ہم دیکھتے ہیں کہ یہاں زائدی تفاعلوں جنم و جنم و غیرہ کے حیثہ  
و اور دائری تفاعلوں جم طہ، جب طہ و غیرہ کے حیثہ طہ میں ایک  
مشابہت ہے۔ ہر صورت میں تغیر متبوع نقطہ پ کے جواب میں جس کے محدود  
(جنم و، جنم و) یا (جم طہ، جب طہ) ہیں قطاعی رقبہ اپ کے  
دو چند کو تعبیر کرتا ہے۔

$$(۹) \dots\dots\dots ۱ = \frac{\text{لا}}{\text{و}} - \frac{\text{ط}}{\text{و}} \dots\dots\dots (۹)$$

کی صورت میں مثبت شاخ پر کسی نقطہ کے محدود ہیں

$$(۱۰) \dots\dots\dots \text{لا} = \text{و جنم و}، \text{ما} = \text{پ جنم و} \dots\dots\dots (۱۰)$$

اور قطاعی رقبہ  $\frac{1}{۳} \times \text{و پ} \times \text{و پ}$  ہے۔

مثال ۳۔ قطع مکافی کی مساوات لمبا ط کسی قطر اور اس پر کے تماس کے ہے

$$(۱۱) \dots\dots\dots \text{ما} = \frac{۴}{۳} \text{لا} \dots\dots\dots (۱۱)$$

۲۳۵

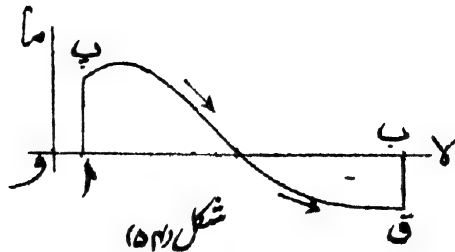
اس قطعہ مکانی کا رقبہ یکو وتر لا = عا کا تا ہے یہ ہے  
 ۲ جب سے  $\int$  ما فر لا = ۴ جب سے  $\int$  لا فر لا  
 =  $\frac{1}{3}$  لا  $\int$  عا جب سے =  $\frac{4}{3}$  عا بہا جب سے  
 اگر ۲ بہا وتر کا طول ہو۔  
 پس کسی قطعہ مکانی کا رقبہ اس سطح کے دو تہائی کے مساوی ہے جس کا  
 ایک ضلع قطر پر وتر کا مقطوعہ (عا) ہے اور دوسرا مرتبہ پر وتر کا ضلع  
 (۲ بہا جب سے) ہے۔

۱.۱۔ رقبہ کو کیا علامت دی جانی چاہئے؟

دفعہ میں چکے سے یہ مان لیا گیا ہے کہ ب کے اوپر معین فم (لا)  
 تکمیل کی تمام سمت میں مثبت ہے۔ اگر ان قیود کو چھوڑ دیا جائے تو بات سانی  
 معلوم ہوگا کہ تکمیل

فم (لا) فر لا ..... (۱)

± میں کے مساوی ہے جہاں میں وہ رقبہ ہے جو منحنی 'مخور لا'  
 اور اطراف کے معینوں کے درمیان گھرا ہوا ہے۔ مثبت علامت لینا چاہئے  
 اگر ب سے ق کی



سمت میں جانے سے رقبہ دائیں جانب واقع ہوا اور منحنی علامت (-) لینا چاہئے۔ اگر رقبہ بائیں جانب واقع ہو جہاں پ (ا) ق ب لا = ا لا = ب کے جواب میں منحنی کے عین ہیں۔ اگر منحنی (ا) ب کے درمیان محور لا کو کاٹتا ہے تو مکملہ سے رقبہ کا وہ اضافہ (مثبت یا منفی) حاصل ہوتا ہے جو دائیں طرف والے رقبہ کو بائیں طرف والے رقبہ پر ہے۔ ان تعینات کے ساتھ بھی ضابطہ

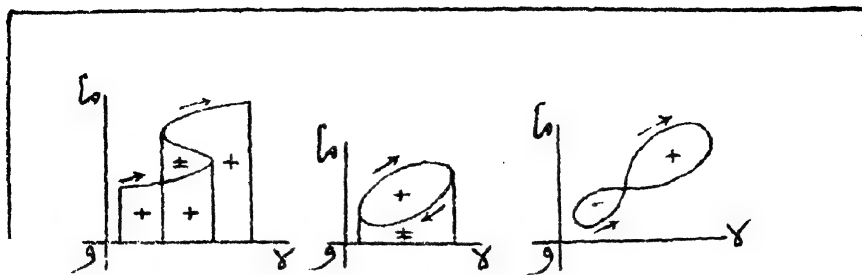
پ (ا) ق ب لا = ا لا = ب کے ساتھ (۲) .....

کا اطلاق صحیح طور پر اسی صورت میں ہو سکتا ہے جبکہ تمام وقفہ پ - لا بھر میں لا کی ہر ایک قیمت کے لئے ما یا (لا) کی ایک یگانہ قیمت ہو۔ اگر لا کی بجائے ایک اور مقدار ت متبوع متغیر قرار دی جائے اور یہ ایسی ہو کہ جیسے ت بڑھے اس کا متناظر نقطہ پ متسل طور پر منحنی کے ساتھ حرکت کرے تو ضابطہ

پ (ا) ق ب لا = ا لا = ب کے ساتھ (۳) .....

سے عام معنوں میں وہ رقبہ تعبیر ہوگا جو منحنی، محور لا اور نقاط پ، پ [جبکہ لئے ت = ت اور ت = ت] کے معنوں کے درمیان گھرا ہوا ہے یعنی

یہ مان لیا گیا ہے کہ محاورہ لا، ما کی سمتیں وہ ہیں جو شکل میں دکھائی گئی ہیں۔ متقابل صورت میں الفاظ ”دائیں“، ”بائیں“ کو باہم بدل دینا چاہئے۔  
+ مثلاً نیٹیفی منحنی کی توس میں لی جاسکتی ہے جیسے منحنی کے کسی ثابت نقطہ سے ناپنا شروع کیا گیا ہو۔



شکل ۵۵

مربعین ما کے دائیں جانب حرکت کرنے سے جو رقبہ کا حصہ مرتسم ہوتا ہے اسکا اضافہ اس رقبہ پر جو بائیں جانب حرکت کرنے سے مرتسم ہوتا ہے اس تکملہ سے تعبیر ہوتا ہے یہاں صورت میں ہوگا جبکہ ما مثبت ہو۔ اگر ما منفی ہو تو اس تکملہ سے رقبہ کی وہ زیادتی تعبیر ہوگی جو بائیں جانب کے مرتسم رقبہ کو دائیں جانب کے مرتسم رقبہ پر حاصل ہے۔

اگر حرکت کی کسی قیمت کے لئے 'پ' ایک بند منحنی مرتسم کر کے اپنے پہلے مقام پر واپس آجائے تو تکملہ

$$y = \frac{f}{f} \text{ فرت} \dots \dots \dots (۴)$$

کو مناسب حدود کے درمیان لینے سے منحنی کے اندر کا رقبہ حاصل ہوگا اور اسکی علامت + یا - ملے گی بموجب اس کے کہ رقبہ پ کے دائیں یا بائیں جانب رہے جبکہ نقطہ 'ت' کے بدلنے کے ساتھ منحنی مرتسم کرے۔ اگر منحنی اپنے آپ کو کاٹے تو ضابطہ (۴) سے گھڑے ہوئے رقبوں کی وہ زیادتی حاصل ہوگی جو دائیں

۴ دفعہ ۸۹ میں نمائندہ تصویر کا حوالہ دیا گیا ہے بھاپ نے فشارہ (پیشن) پر آگے کی ماریں جو کام کیا اسکی زیادتی اس کام پر جو پیشہ دار ماریں بھاپ خارج کرنے میں ہوا اس رقبہ سے تعبیر ہوتی ہے جو منحنی کے اندر گھرا ہوا ہے۔ پس اس رقبہ سے وہ خالص توانائی حاصل ہوتی ہے جو فشارہ کو ایک پوری ضرب میں دی گئی۔



طرف کے رقبوں کو بائیں طرف کے رقبوں پر حاصل ہے۔ (دیکھو شکل ۵۵)  
بعض اوقات منحنی کا رقبہ معلوم کرنے میں یہ زیادہ سہولت مند ہوتا ہے کہ  
لا کی بجائے ما کو تغیر متبوع مانا جائے۔ ایسی صورت میں رقبہ جو منحنی، محور ما  
اور خطوط ما = ہ، ما = ک کے درمیان گھرا ہوا ہے صریحاً اسی قسم کی فیوڈ کے  
تابع ذیل کے کملہ سے حاصل ہوتا ہے

لا فرما ..... (۵)  
زیادہ عام ضابطہ (۳) کے جواب میں یہ ہوگا

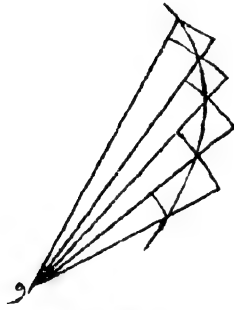
لا فرما ..... (۶)  
معاینہ سے معلوم ہوگا کہ علامت کا قاعدہ الٹ دیا جانا چاہئے۔

اگر ایسا کیا جائے تو جملہ  $\frac{1}{2} \pi$  (لا فرما - ما فرما) فرت ..... (۷)  
سے بند منحنی کا رقبہ تعبیر ہوتا ہے جہاں ت کے حدود ایسے ہیں کہ نقطہ (لا، ما)  
اپنے ابتدائی مقام پر واپس آجاتا ہے۔ اب علامت کا کلیہ یہ ہے کہ جملہ (۷)  
مثبت ہوتا ہے جبکہ رقبہ ت کے بڑھنے کی سمت میں حرکت کرنے والے  
نقطہ کے بائیں جانب واقع ہوتا ہے۔

۱۰۲۔ قطبی محدودوں کے لحاظ سے رقبے۔ اگر منحنی کی مساوات  
قطبی محدودوں میں

ر = فہ (طہ) ..... (۸)  
ہو تو رقبہ جو منحنی اور دو سمتی نیم قطروں طہ = عہ، طہ = بہ کے  
درمیان گھرا ہوا ہے وہ اس ضابطہ سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2} \int_{\text{قطب}}^{\text{قطب}} \text{رفرطہ یا } \frac{1}{2} \int_{\text{قطب}}^{\text{قطب}} [\text{فہ (طہ)}] \text{ فرطہ} \dots (۲)$$



شکل (۵۶)

کیونکہ جیسا ساتھ کی شکل میں

دکھایا گیا ہے ہم دائروں کے

قطاعوں کی مدد سے گھرنے

والا رقبہ ملے اور گھرا ہوا

رقبہ ملے مرتب کر سکتے

ہیں۔ ان میں سے کسی ایک

قطاع کا رقبہ  $\frac{1}{2} \int_{\text{قطب}}^{\text{قطب}} \text{رفف طہ}$

ہے جہاں  $\int_{\text{قطب}}^{\text{قطب}}$  اس کا نصف

قطر ہے اور رفف طہ اس کا زاویہ اور اس کے قطاعوں کے کسی ایک سلسلہ کا

مجموعہ اس نمونہ کے سلسلہ سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2} \int_{\text{قطب}}^{\text{قطب}} \text{رفف طہ} \dots (۳)$$

اس لئے سلسلہ کی یگانہ انتہا ہے جو (۲) سے تعبیر ہوتی ہے۔

یہاں مان لیا گیا ہے کہ جہاں  $\int_{\text{قطب}}^{\text{قطب}}$  اور ابتدا میں سے گزرنے والا

کوئی سمتی نیم قطر قوس کو صرف ایک نقطہ پر کاٹتا ہے۔ لیکن اگر ایک نیا

متغیر متبوع آتے ایسا داخل کیا جائے کہ قوس کے بڑھنے سے متناظر نقطہ

پ منحنی پر مسلسل طور سے حرکت کرے تو جملہ

$$\frac{1}{2} \int_{\text{قطب}}^{\text{قطب}} \text{رفرطہ فرت} \dots (۴)$$

خالص اس رقبہ کو تعبیر کرے گا جو سمتی نیم قطعات کے قوس سے قوس تک

جانے میں عبور کرتا ہے یعنی اس جملہ سے رقبہ کے ان حصوں کا اضافہ (مثبت یا منفی)

جو طہ کے بڑھنے کی سمت میں سمتی نیم قطر کے حرکت کر نیے مرتب ہوتے ہیں ان حصوں پر جو

مقابل سمت میں منقسم ہوتے ہیں تعبیر ہوگا۔ علاوہ اس کے اگر ت کے بڑھنے سے نقطہ پ ایک بند منحنی منقسم کر کے واپس اپنی ابتدائی حالت میں آجائے تو جملہ

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r}{r^2} \text{ فرت} \dots \dots \dots (5)$$

سے ت کے مناسب حدود کے درمیان عام معنوں میں وہ رقبہ ملے گا جو منحنی سے گھرا ہو یعنی (ت کے بدلنے کے ساتھ جیسے نقطہ پ منحنی منقسم کرتا ہے) اس نقطہ پ کے بائیں جانب جو رقبہ واقع ہوتا ہے اس کی زیادتی اس رقبہ پر جو اثنائے حرکت میں دائیں جانب واقع ہوتا ہے (یہ زیادتی) اس جملہ (5) سے تعبیر ہوتی ہے۔ مقابلہ کرو دفعہ ۱۰۱ کے ساتھ۔

یہ دیکھا جائے کہ ضابطہ (5) دفعہ ۱۰۱ کے ضابطہ (4) کا مثال ہے۔ اگر دو ساتھ کے نقطوں پ اور ق کے محدود بالترتیب (لا، ما) اور (لا + مف لا، ما + مف ما) ہوں تو عنصری مثلث و پ ق کا رقبہ علامت کی قرارداد کے ماتحت شکلی ہندسہ کے ایک ضابطہ کی رو سے یہ ہے

$$\frac{1}{2} (لا مف ما - ما مف لا)$$

ہماری موجودہ ترقیم میں  $\frac{1}{2} ر مف ط$  سے وہی چیز تعبیر ہوتی ہے۔ مثال ۱۔ دائرہ اگر  $۲ = ۱$  جب ط  $\dots \dots \dots (6)$  کا رقبہ (دیکھو شکل ۳۸ دفعہ ۶۳) ہے

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} ر \text{ فرت} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} ر \text{ جب ط فرت} = \frac{1}{2} \dots (7)$$

اصل یہ مف تصدیق ہے یا مثلثی مکملہ کی قیمت نئی طرح سے دریافت کرنا ہے۔ مثال ۲۔ قطع مکانی

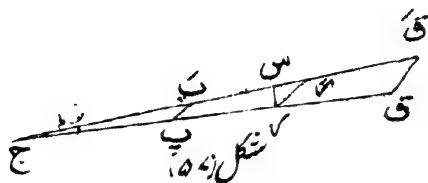
$$= \frac{۱۲}{۱ + جم ط} \dots \dots \dots (8)$$



$$= \frac{1}{4} \text{ ج ق } \times \text{ مف ط ه } - \frac{1}{4} \text{ ج پ } \times \text{ مف ط ه }$$

$\text{پ ق} \times \text{پ} = (\text{ج پ} + \text{ج ق}) \text{مفاطہ}$

= پ ق × ج ر × م ف ط ه = پ ق × ر س



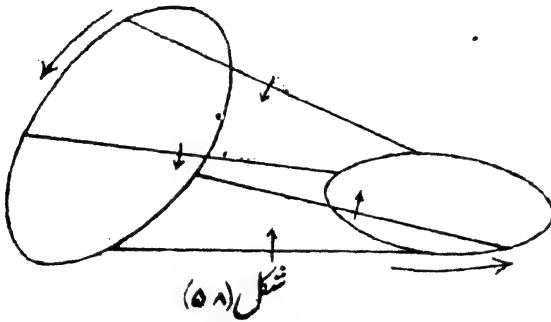
اگر طول پ ف کو ع سے تعبیر کیا جائے اور مر کے عنصری ہٹاؤ کو مف تشہ سے جہاں یہ ہٹاؤ متحرک خط کی عمودی سمت میں ناپا گیا ہے تو رقبہ جو عبور ہوا اس ضابطہ سے تعبیر ہوگا

یہ توجہ کے قابل ہے کہ دفعات ۱۰۰، ۱۰۲ کے ضابطے اس نتیجہ کی خاص تصویریں ہیں۔ مثلاً دفعہ ۱۰۰ (۳) حاصل ہوگا اگر رکمیں

ع = ما / مہف ثما = مہف (لاجب سہ)  
مندرجہ بالا میں یہ خاموشی سے مان لیا گیا ہے کہ رقبہ ہمیشہ ایک ہی سمت  
میں عبور ہوے ہیں۔ لیکن یہ آسانی سے معلوم ہوگا کہ ضابطہ (۱) بغیر کسی ایسی  
قید کے لگ سکیگا بشرطیکہ رقبوں کو مثبت شمار کیا جائے جبکہ یہ خط کے اس  
جانب عبور ہوں جس جانب مہف ثما کو مثبت خیال کیا جاتا ہے اور  
اسکی مقابل سمت میں منفی۔ مثلاً جو رقبہ ایک ایسا خط مستقیم عبور کرتا ہے جس کا  
وسطی نقطہ ثابت ہے اس حساب کے مطابق صفر ہوگا۔

تقریباً نصف قطر کے برابر ہے۔ اس صورت میں مثبت ہے جبکہ اس کی حرکت بلحاظ ایک مشاہد کے جو پ سے ق کی جانب سیدھا ایک خط مستقیم میں دیکھ رہا ہے پ ق کے بائیں جانب ہے۔ اگر پ ق کے

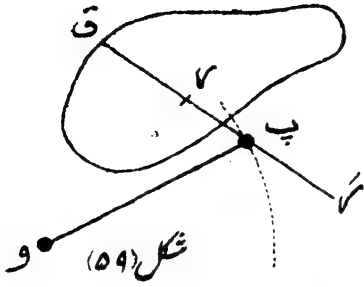
سرے دو بند منحنیوں کو مرسم کریں اور آخر میں پ ق اپنے پہلی مقام پر آجائے تو اوپر کی قرارداد کے موافق 'ق' کے راستہ سے جو رقبہ محیط ہوتا ہے اسکی زیادتی اس رقبہ پر جو پ کے راستہ سے محیط ہوتا ہے اس تکملہ (۱) سے تعبیر ہوگی بشرطیکہ ان رقبوں کی علامتیں دفعہ ۱۰۲ کے قاعدہ کے مطابق ہوں۔



۱۰۴۔ ایملر کے سطح پیمائش (Amsler's planimeter) کا نظریہ۔

سطح پیمائش ایک آلہ ہے جس کی مدد سے کاغذ پر کھینچی ہوئی کسی شکل کا رقبہ آلی یا حلی طریقہ پر دریافت کیا جاتا ہے۔

ایسے کئی آلات ایجاد ہوئے ہیں، لیکن سب سے سادہ اور مقبول ایملر کا سطح پیمائش ہے جو ۱۸۵۲ء میں ایجاد ہوا۔ ایملر شاف ہاؤس (سومرز لینڈ) کا رہنے والا تھا۔ یہ آلہ دو سلاخوں وپ، پ ق پر مشتمل ہے جو آزاد طور پر پ پر رول کی جاتی ہیں۔ سلاخ وپ ایک ثابت نقطہ و کے گرد گھوم سکتی ہے۔ اگر ایک مرسم نقطہ (پنسل) سلاخ پ ق کے ساتھ ق پر



۲۲۱ لگایا جائے اور اس کو ایک بند تختی کے گرد بھرا جائے تو پ ایک دائرہ کی قوس پر آگے پیچھے ہتھلا کرے گا تو یہ صفر رقبہ کا احاطہ کرے گا۔ اسلئے دفعہ ۱۰۳ کے آخر میں جو مسئلہ بیان ہوا اس کے متعلق

ق نے جو رقبہ مرشم کیا وہ مساوی ہوگا

۱۔ ل فرشتہ ..... (۱)  
کے جہاں پ ق کا طول ل ہے اور ل فرشتہ سے پ ق کے وسطی نقطہ سر کی گئی حرکت تعبیر ہوتی ہے جبکہ ہمیشہ اس کا پ ق کے عمود کی سمت میں اندازہ کیا جائے۔

اب جیسا کہ آلہ کے حقیقی استعمال میں عام طور پر ہوتا ہے اگر پ ق پورا چکر لگانے کے بغیر اپنے اصلی مقام پر واپس آجائے تو سر کی گلی حرکت پ ق پر عمود و استقامت میں وہی ہوگی جو خط پ ق کے کسی اور نقطہ مثلاً سر کی ہے۔ کیونکہ اگر سر کے راستوں کے متناظر اجزاء مف مثلاً مف مثلاً ہوں جنہیں اوپر کی سطح ناپایا گیا ہے تو

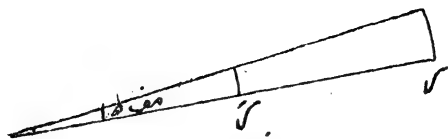
مف مثلاً = مف مثلاً = سر مف طما

جہاں سر کے متصل مقامات کے درمیان زاویہ مف طما ہے۔ اسلئے

۲۔ مف مثلاً = مف مثلاً + سر مف طما = مف مثلاً ..... (۲)

کیونکہ مفروضہ حالات کے ماتحت مف طما = ۰

\* بالعموم یہ ہی بات انہیں ہے جو سر کے راستہ کا طول۔



شکل ۱۶۰

آلہ کی حقیقی ساخت میں، پیچھے کی طرف خارج کئے ہوئے خط ق پ پر کے نقطہ سر کی تکمیلی یا کئی حرکت، نسلخ کے عمود دار ایک چھوٹے پھیپہ کے ذریعے درج (Record) کی جاتی ہے جہاں پھیپہ کا محور پ ق کی سمت میں ہوتا ہے جیسے ق کوئی منحنی مرستم کرتا ہے۔ پھیپہ کا غذکی سطح میں جس پر منحنی کھینچا ہوا ہے تھوڑا الٹا ہے اور محور اچھلنا ہے اور پھیپہ کا گھومنا سر کے عمودی ہٹاؤ کے عین متناسب ہے۔ پہلے پر درجے لگے ہوتے ہیں اور جزوی گردشوں کے ریکارڈ کے لئے ایک ثابت نامزد ہوتا ہے۔ پوری گردشیں ایک Dial and counter کی مدد سے ناپی جاتی ہیں۔

طول پ ق کے بدلنے کے لئے بھی انتظام ہوتا ہے۔ اس سے معض اندلج کا پیمانہ بدلتا ہے۔

زیادہ جربہ ثبوت تحلیلی طریق پر ہے۔ و میں سے قائم محور لو، فنز کو کہ وپ، پ ق محور کا کی مثبت سمت کے ساتھ بالترتیب زاوے طما اور فنا بناتے ہیں رکھو وپ = د، پ ق = ل، توفی کے محدد حسب ذیل ہیں

$$\begin{aligned} \text{لا} &= \text{اجم طما} + \text{ل جم فنا} = \text{اجب طما} + \text{ل جب فنا} \dots (۳) \\ \text{اسلئے لا مف ما} &= \text{لا} = (\text{اجم طما} + \text{ل جم فنا}) - (\text{اجم طما مف فنا}) \\ &= \text{ل جم فنا مف فنا} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ (\text{اجب طما} + \text{ل جب فنا}) - (\text{اجب طما مف فنا} + \text{ل جب فنا مف فنا}) \\ &= \text{لا مف ما} = \text{لا} + \text{ل جم فنا} - (\text{اجم طما} + \text{ل جب فنا}) \end{aligned}$$



$$= \text{مف} \{ \text{ل} \text{ط} + \text{ل} \text{ف} + \text{ل} \text{ج} \text{ب} \text{ف} - \text{ط} \} \quad (۴)$$

۲ + ل ج ب ف (ط - ف) مف ط ..... (۴)  
پ ق میں کے کسی نقطہ کا صفاری ہٹاؤ مف ثہ، جسے پ ق پر عمود  
نایا جائے دو ہٹاؤں سے مرکب ہوگا، ایک ہٹاؤ پ کے لحاظ سے دوسرے  
خود پ کا ہٹاؤ جسے پ ق کی عمود وار سمت میں تحلیل کیا جائے۔ اسلئے  
اگر پ س = ب تو

$$\text{مف ثہ} = \text{ب مف ف} + \text{مف ط} \times \text{ج ب ف} - \text{ط} \dots \dots (۵)$$

اس لئے  $\frac{1}{4} \{ \text{لا مف ما} - \text{ما مف لا} \}$

$$= \frac{1}{4} \text{مف} \{ \text{ل} \text{ط} + \text{ل} \text{ب} - \text{ف} + \text{ل} \text{ج} \text{ب} \text{ف} - \text{ط} \} =$$

$$+ \text{ل مف ثہ} \dots \dots \dots (۶)$$

اس سے ماہل ہوتا ہے کہ اگر ق اس طور پر پور اعلقہ قسم کرے کہ ط اور ف  
واپس اپنی ابتدائی قیمتوں پر عود کریں تو

$$\frac{1}{4} \{ \text{لا مف ما} - \text{ما مف لا} \} = \text{ل مف ثہ} \dots \dots (۷)$$

دائیں جانب کا جملہ دفعہ ۱۰۱ (۷) کی رو سے اس رقبہ کے مساوی ہے جو  
علقہ سے گھرا ہوا ہے۔

۱۰۵۔ مجموعوں کے حجم۔ ایسے مجسم کے ”حجم“ کی بھی عام تعریف

کرنا جو بالتمام مستوی سطحوں سے گھرا ہوا ہو کسی نہ کسی شکل میں ”انتہائی قیمت“  
کے تخیل کو داخل کئے بغیر ناممکن ہے۔

اقلیدسی طریقوں سے یہ ضرور ثابت ہو سکتا ہے کہ دو قائم متوازی السطوح  
کو ایک دوسرے کے ساتھ جو نسبت ہوتی ہے وہ ان نسبتوں سے مرکب  
ہوتی ہے جو ایک کے تین متساوی کناروں کو ایک ایک کر کے دوسرے کے  
تین متساوی کناروں کے ساتھ (نسبتیں) ہوں۔ اور زیادہ عام طور پر دو منشوروں

کو ایک دوسرے کے ساتھ جو نسبت ہوتی ہے وہ ان کے ارتفاعوں کی نسبت اور ان کے قاعدوں کی نسبت سے مرکب ہوتی ہے۔ اس طریق پر کسی منشور اور اکائی مکعب کی باہمی نسبت کی تعریف کی جاسکتی ہے۔

لیکن ایک دئے ہوئے کثیر السطوح کو منشوروں کی محدود تعداد میں کاٹنا عام طور پر ممکن نہیں۔ سادہ اور عام طریقہ یہ ہے کہ اس کو مضلع مخروطوں (میناروں) میں کاٹا جائے جن کے مشترک راس اندر کے کسی نقطہ پر ملیں اور کثیر سطحی کے چہرے ان کے قاعدے ہوں۔ لیکن مینار اور منشور کے حجموں کا مقابلہ بغیر انتہائی قیمت کے تخیل کو داخل کرنے کے نہیں ہو سکتا۔ مثلاً منشور کو البتہ مساوی ارتفاع اور مساوی قاعدوں والے تین میناروں میں کاٹا جاسکتا ہے (اقلیدس ۳۴ ص ۳۷۳) لیکن صفاری عناصر کے تخیل کو شامل کئے بغیر ان میناروں کو آپس میں مساوی بنانا نہیں کیا جاسکتا۔

ایسے مجسم کے حجم کی عام تعریف جو کسی طرح کی سطحوں مستوی یا منحنی سے گھرا ہوا ہو ایسے ہی مرتب ہو سکتی ہے جیسے مستوی شکل کے رقبہ کی صورت میں (شکل ۹۹)۔ ہمیشہ دو شکلیں بنانا ممکن ہوگا جو منشوروں سے بنی ہوئی ہوں، ان میں سے ایک دئے ہوئے مجسم کو گھیرے اور دوسری مجسم سے گھری ہوئی ہو اور ان کے حجموں کا فرق اتنا کم ہو جتنا ہم چاہیں۔ ان میں سے کسی ایک شکل کے حجم کی انتہائی قیمت کو جب ان شکلوں کا فرق لا انتہا کم ہو جائے بطور تعریف کے اختیار کر لیا جاتا ہے کہ یہ دئے ہوئے مجسم کا ”حجم“ ہے۔ پہلے کی طرح ہم اس امر کا اطمینان کر سکتے ہیں کہ یہ انتہائی قیمت یگانہ ہے۔

مستوی متوازی سروں والے کسی اسطوانہ (قائم یا مائل) کا حجم کسی سرے کے رقبہ اور سروں کے درمیان کے عمودی فاصلہ کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔ کیونکہ حائط اور نیز محیط منشوری شکلیں بنائی جاسکتی ہیں جنکے قاعدے ایسے کثیر الاضلاع ہیں جو اسطوانہ کے قاعدہ کا احاطہ کرتے ہیں اور اس سے محیط ہو جاتے ہیں۔ اوپر کا بیان ان میں سے ہر شکل کے لئے درست ہے۔ اسلئے انتہائی قیمت اسطوانہ کے لئے بھی درست ہے۔ دائری اسطوانہ کا حجم اسلئے  $\pi r^2 h$  ہے

جہاں ارتفاع کا نصف قطر ہے اور  $F$  اس کا ارتفاع۔ اس طرح متوازی مستوی سطحوں والے اسطوانہ کا حجم معلوم ہو گیا۔ اب اگر ہم چاہیں تو بطور ضمنی اشکال کے جو اوپر عام تعریف میں استعمال کی گئی ہیں منشوروں کی بجائے ایسے اسطوانے استعمال کر سکتے ہیں۔ کسی طریقہ سے بھی آخری انتہا لازماً ہی ہونی چاہئے۔

## ۱.۶۔ کسی مجسم کے حجم کے لئے عام جملہ۔

محور  $LA$  کو کسی مناسب سمت میں کھینچ لیا جائے۔ مبدأ سے فاصلہ  $LA$  پر ایک سطح مستوی لیکر جو محور پر عمود ہو اگر مجسم کو تراشا جائے تو فرض کرو کہ اس تراش کا رقبہ  $F(LA)$  ہے۔ اگر وقفہ  $h$   $LA$  پر محور  $LA$  کے عمود دار مستوی سطحوں کا نظام کھینچا جائے تو ظاہر ہے کہ حجم مطلوبہ ذیل کے مجموعہ کی انتہا ہوگی

.....  $F(LA) \cdot h$  ..... (۱)

کیونکہ اس مجموعہ کا ہر جزو ایک اسطوانہ کے حجم کو تعبیر کرتا ہے جس کا ارتفاع  $h$   $LA$  ہے اور قاعدہ  $F(LA)$ ۔ اس لئے حجم مطلوبہ حاصل ہوگا اس ضابطہ سے

.....  $F(LA) \cdot h$  ..... (۲)

جہاں  $LA$  کو مناسب حدود کے اندر لیا جانا چاہئے۔

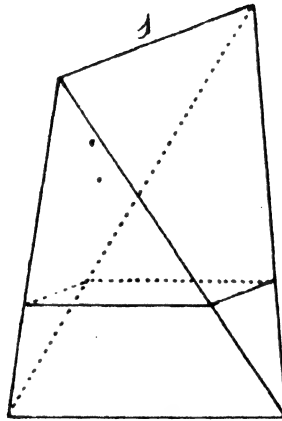
مثال ۱۔ مخروط (یا مینار) کی صورت میں جو قائم یا مائل ہو اور کسی قاعدہ پر کھڑا ہو مبدأ  $L$  پر اس پر عمود محور  $LA$  قاعدہ پر عمود دار۔ فرض کرو کہ قاعدہ کا رقبہ  $A$  ہے اور ارتفاع  $F$  تو مبدأ  $L$  سے فاصلہ  $LA$  پر تراش کا رقبہ

$$F(LA) = A \left( \frac{LA}{F} \right)^2 \quad (۳)$$

کیونکہ متشابهہ رتبے متناظر اضلاع کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں۔ اس لئے حجم

$$= \frac{1}{3} A F \quad (۴)$$

یعنی قاعدہ کے رقبہ اور ارتفاع کے مائل ضرب کے ایک تہائی کے مساوی ہے۔  
مثال ۲۔ چار سطحی کا حجم ہے  $\frac{1}{4}$  ص اور جب عہ ..... (۵)  
جہاں 'ا' کے مقابل کے کناروں کے طول ہیں، ص ان کے درمیان کم سے کم  
فاصلہ ہے اور عہ انکی سمتوں کے درمیان زاویہ ہے۔



شکل (۶۱)

چار سطحی کو سروں 'ا' کے متوازی سطحوں سے تراش کر باریک پتروں یا چادروں میں  
تقسیم کرو۔ یہ تراشیں کم سے کم فاصلہ ص پر عمود وار ہوں گی۔ شکل (۶۱) کے حوالہ سے ظاہر  
ہے کہ نظام کے اس ستوی کی تراش جو سرے 'ا' سے فاصلہ 'لا' پر واقع ہے ایک  
متوازی الاضلاع شکل ہوگی جس کے اضلاع ہیں

$$\frac{لا}{ص} \times ا \quad \text{اور} \quad \frac{ص - لا}{ص} \times ا$$

۲۳۵

اور اس کا رقبہ ہے  $\frac{ا \times (ص - لا)}{۲}$  جب عہ

اس لئے چار سطحی کا حجم ہے  $= \frac{ا \times (ص - لا)}{۳} \times عہ$  جب عہ  $\frac{ا}{۳}$  (ص - لا) فرلا

جودی ہوئی قیمت میں تحویل ہو جاتا ہے۔  
۱۰۷۔ گردشی مجسم۔ فرض کرو کہ تکوینی منحنی

$$\text{ما} = \text{فنا} \quad (۱۱) \dots\dots\dots (۱)$$

ہے، محور لا متنازل کا محور ہے اور مجسم مستوی سیرول سے گھرا ہوا ہے جو محور لا پر غود ہیں۔ اس صورت میں رقبہ ف (لا) اس دائرہ کا رقبہ ہے جس کا نیم قطر ما ہے اور یہ  $\pi$  ما ہوگا۔ اس لئے مطلوبہ حجم ہے

$$\int \pi \text{ ما}^2 \text{ فرلا} \dots\dots\dots (۲)$$

جبکہ اسے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔ دراصل اس مجموعہ کا ہر عنصر، جسکی انتہا اوپر کا مکملہ ہے ایک گول تختی کے حجم کو تعبیر کرتا ہے جس کی موٹائی صفت لا ہے اور رقبہ  $\pi$  ما<sup>۲</sup>۔

مثال ۱۔ دائرہ کی مساوات جبکہ مبدأ اس کے محیط پر کا کوئی نقطہ ہو یہ ہے

$$\text{ما}^2 = \text{لا} (۱۲ - \text{لا}) \dots\dots\dots (۳)$$

اس لئے قطعہ کرہ کا حجم جس کا ارتفاع ف ہو یہ ہے

$$\int \pi \text{ لا} (۱۲ - \text{لا}) \text{ فرلا} = \pi \left[ ۱۲ \text{ لا}^2 - \frac{\text{لا}^3}{۳} \right] \text{ ف}$$

$$\pi \text{ ف} (۱ - \frac{\text{ف}}{۳}) \dots\dots\dots (۴)$$

جہاں کرہ کا نیم قطر ہے۔ پورے کرہ کے لئے ف = ۱۲ اور حجم ہے  $\frac{۴}{۳} \pi ۱۲^3$

یا مائل مستدیر اسطوانہ کے حجم  $(\pi \times ۱۲ \times ۱۲)$  کا دو تہائی۔

مثال ۲۔ منحنی  $\text{ما}^2 = \text{لا}^۴$  ..... (۵)  
کو محور لا کے گرد گھمانے سے جو مکافی بنا پیدا ہوتا ہے اس کے قطعہ یا حصے کا حجم جس کا ارتفاع ف ہو یہ ہے

$$\pi \int^{\text{ف}} \text{ما} \text{فرلا} = \pi \int^{\text{ف}} \left[ \frac{\text{لا}}{2} \right] \pi \int^{\text{ف}} = \pi \int^{\text{ف}} \text{رف} \dots (۶)$$

اگر قاعدہ کا نیم قطر ب ہو تو ب<sup>۲</sup> = م<sup>۲</sup> ل<sup>۲</sup> ف<sup>۲</sup> - اس لئے حجم ہے  $\frac{1}{2} \pi \int^{\text{ف}} \text{ب}^2 \text{رف}$   
یا اسی قاعدہ اور اسی بلندی کے اسطوانہ کے حجم کا آدھا۔  
مثال ۳ - لنگر چھلے کا حجم دریافت کرو جو دائرہ

۲۴۷

(۷)  $\text{لا}^2 + (\text{ما} - \text{ل})^2 = \text{ب}^2$  .....  
کو محور لا کے گرد پھرانے سے پیدا ہونے جہاں ل<sup>۲</sup> ب<sup>۲</sup> دیکھو شکل (۶۳)۔  
= ب کے درمیان لا کی ہر ایک قیمت کے لئے ما کی دو قیمتیں ہیں فرض کرو ما، ما<sup>۲</sup> یعنی

$$\text{ما} = \text{ل} + \text{ب} \quad \text{لا}^2 + (\text{ما} - \text{ل})^2 = \text{ب}^2 \quad \text{لا}^2 + \text{ب}^2 = \dots (۸)$$

چھلے کی تراش کا قریبہ بنیکا ہے محور لا پر عمود وارستوی سے کاٹا جائے ہوگا

$$\pi \int^{\text{ف}} \text{ما} - \pi \int^{\text{ف}} \text{ل} = \pi \int^{\text{ف}} \text{ب}^2 \quad \text{لا}^2 + \text{ب}^2 = \dots (۹)$$

اور مطلوبہ حجم ہے  $\pi \int^{\text{ف}} \text{ب}^2$  .....  
دفعہ ۹۶ مثال ۵ کی رو سے -

یہ حجم اس اسطوانہ کے حجم کے مساوی ہے جس کی تراش (ب<sup>۲</sup>) چھلے کی تراش کے  
مساوی ہو اور جس کا طول (۱۱۲۲) اس دائرہ کے محیط کے مساوی ہو جو تکنونی دائرہ کا مرکز م<sup>۲</sup> م<sup>۲</sup> ہے

۱۰۸ - بعض متعلق صورتیں - دفعہ ۱۰۶ کے عام ضابطہ (۲)

کی اور مثالیں درج کی جاتی ہیں -  
مثال ۱ - ناقص مکافی نا

$$\text{لا}^2 = \frac{\text{ما}^2}{\text{پ}} + \frac{\text{می}^2}{\text{ق}} \dots (۱)$$

کی تراش مستوی لا = مستقل سے ایک ناقص ہے جس کے نیم محور  $\frac{1}{2} \text{پ}$  اور

۲۱.  $\overline{پ ق لا}$  میں اور اس لئے اس کا رقبہ ۲۱  $\overline{پ ق لا}$  ہے۔

اس لئے مستوی لا = ف مجسم سے جو قطعہ کا ٹٹا ہے اس کا حجم ہے

۲۲.  $\overline{پ ق لا}$  فر لا = ۲۱  $\overline{پ ق ف}$  ..... (۲)

یہ اس اسطوانہ کے نصف حجم کے مساوی ہے جس کا ارتفاع وہی ف ہو اور وہی ناقصی قاعدہ پر قائم ہو۔

مثال ۲۔ ناقص نما  $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} + \frac{ج}{۳} = ۱$  ..... (۳)

میں مستوی لا = مستقل سے تراش ایک ناقص ہے جس کے نیم محور ہیں

ب  $\frac{لا}{۱} - ۱$  اور ج  $\frac{لا}{۱} - ۱$  ..... (۴)  
اور جس کا رقبہ ہے

۲۱ ب ج  $(۱ - \frac{لا}{۱})$  ..... (۵)

کسی دو مستویوں کے درمیان کے حصہ کا حجم جبکہ یہ مستوی محور لا پر عمود وار ہوں یہ ہے

۲۱ ب ج  $(۱ - \frac{لا}{۱})$  فر لا ..... (۶)

جے لا کے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔ کل حجم کے لئے لا کے حدود  $\pm$  دیں اور کل حجم ہے  $\frac{۲}{۳} ۲۱ ب ج$ ۔

۱۰۹۔ سپین کا قاعدہ۔ اوپر کے اکثر نتائج دراصل ایک عام

نسبہ میں شامل ہیں جو ایسی تمام صورتوں میں لگ سکتا ہے جہاں محور لا پر

عمود وار مستوی تراش کا رقبہ لا کا دوسرے درجہ کا متغیر ہو۔  
ایسی صورت میں دو متوازی مستویوں کے درمیان کا حجم محض ان تراشوں

کے رقبوں اور ان کے عین درمیان کی تراش کے رقبے اور سیروں کے مستویوں کے درمیان کے وقفے (۲ ف) کی رقوم میں حاصل ہو سکتا ہے۔ چونکہ دو درجہ تفاعل کی صورت لا میں ایک متقل جمع کرنے سے نہیں بدلتی، ہم مبدأ کو بآسانی وسطی تراش میں لے سکتے ہیں۔ رکھو

$$\text{ف (لا)} = \text{ا} + \text{ب لا} + \text{ج لا} \dots (۱)$$

اس طرح

$$\text{ف (لا)} = \text{ا} + \text{ب لا} + \text{ج لا} + \text{د لا} \dots (۲)$$

تراشوں لا = ف لا = ب لا = ج لا کے رقبوں کو بالترتیب  
س، س، س سے تعبیر کرو، اس طرح

$$\text{ا} = \text{ب ف} + \text{ج ف} = \text{س} \dots (۳)$$

$$\text{ب} = \text{ا ف} + \text{ج ف} + \text{د ف} = \text{س} \dots (۴)$$

یہی وہ ضابطہ ہے جسکی طرف اوپر اشارہ کیا گیا ہے۔ اسکی تعبیر یہ بھی ہو سکتی ہے کہ مجسم کی وسطی تراش ہے

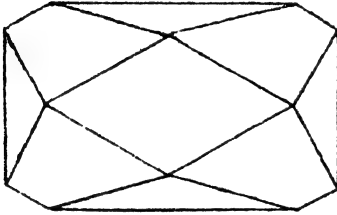
$$\frac{۱}{۶} (\text{س} + ۲ \text{س} + \text{س}) \dots (۵)$$

یہ بآسانی معلوم ہو سکتا ہے کہ (۱) میں رقم د لا کا اضافہ (۴) کی طرح کوئی اثر نہیں رکھیکا۔ پس اس نتیجہ کی توسیع ایسی صورت کے لئے بھی ہو سکتی ہے جہاں ف (لا) تیسرے درجہ کا ہے۔

ضابطہ (۱) صیر کا مخروط، مخروط مضلع یا کرہ کی صورت میں لگ سکتا ہے نیز یہ مکانی نما، ناقص نمایا یا زائد نما کی صورت میں بھی لگ سکتا ہے بشرطیکہ

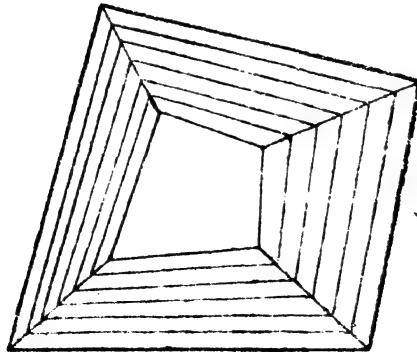


احاطہ کرنے والی تراشیں صدری محور پر عمود وار ہوں۔ جو طالب علم درجہ دوم کی سطحوں کے نظریہ سے واقف ہے وہ آسانی سے دیکھ لے گا کہ یہ آخری شرط ضروری نہیں ہے۔ ایسے مجسم کی صورت بھی موجودہ قاعدہ کے تحت آتی ہے جہاں مجسم



شکل (۶۲)

دو متوازی مستوی کثیرزاویہ  
رخوں اور اطراف میں مستوی  
رخوں سے جو مثلث ہوں  
یا منحرف گھڑا ہوا ہو۔ انہیں  
ہم وہ صورت بھی شامل کر سکتے  
ہیں جہاں بعض مناسب طرزی پہلو  
ایسی منحنی سطحیں ہوں (زائدی  
مکانی نما) جن کی نکوین خطوط  
مستقیم سے ہوتی ہے جو کثیر الاضلاعوں کے مستویوں کے متوازی حرکت کرتے  
ہیں اور جن میں سے ہر ایک خط دو ایسے خطوط متتقم کو قطع کرتا ہے جن میں سے  
ہر ایک ایک کثیر الاضلاع کے ایک اُسل کو دوسرے کثیر الاضلاع کے ایک اُسل سے  
ساتھ ملاتا ہے۔



شکل (۶۳)

اور چونکہ ہر کثیر الاضلاعی رخ میں اضلاع کی تعداد لا انتہا بڑھائی جاسکتی ہے، تاہذا  
اُس مجسم کی صورت میں بھی لگیکے جو دو مستوی متوازی رخوں سے اور ایک ایسی منحنی  
سطح سے گھرا ہوا ہو جو ایک خط مستقیم کی حرکت سے پیدا ہوئی ہے اور یہ خط ہمیشہ  
ان رخوں کے محیطوں سے ملتا ہے۔

مثال ۱۔ نامکمل قائم مستدیر مخروط کا حجم دریافت کرو۔  
فرض کرو کہ مستوی سروں کے نصف قطر 'ا' ہے اور وسطی تراش کا نصف  
قطر  $\frac{1}{2}$  (ا + ب) ہے۔ پس

$$س_۱ = \pi \cdot ا^۲ = س_۲ = \pi \cdot \left(\frac{ا + ب}{۲}\right)^۲ \quad (س_۱ = س_۲)$$

اس لئے حجم ہے  $\frac{1}{3} \pi ف (ا^۲ + ا + ب + ب^۲) \dots \dots (۶)$   
جہاں نامکمل کا ارتفاع ف ہے۔

مثال ۲۔ نصف قطر کے مجسمہ میں، نصف قطر ب کا ایک سطحانی سوراخ  
مرکز میں سے برمایا گیا ہے۔ باقی ماندہ حجم دریافت کرو۔

$$۳۴۹ \quad \text{یہاں } س_۱ = س_۲ = \pi (ا^۲ - ب^۲) \quad (س_۱ = س_۲)$$

اس لئے وسط تراش  $\frac{2}{3} \pi (ا^۲ - ب^۲)$  ہے۔ سوراخ کا طول  $\frac{2}{3} (ا - ب)$  ہے۔ مطلوبہ حجم

$$\text{اس لئے ہے } \frac{2}{3} \pi (ا^۲ - ب^۲) \quad (۷)$$

۱۱۔ منحنی خطوط کا طول معلوم کرنا۔ مستقیم الاضلاع شکل کا محیط

وہ طول ہے جو شکل کے مختلف اضلاع کے مساوی طول لیکر ان کو ترتیب وار ایک  
ہی خط مستقیم میں سروں پر سرے رکھنے سے ماہل ہو۔  
چونکہ منحنی خط خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہو خط مستقیم کے کسی حصہ پر یوں منطبق  
نہیں کیا جاسکتا، اس لئے اس امر کی تعریف مطلوب ہے کہ ایک منحنی کے  
”طول“ سے کیا مراد ہے۔ عام طور پر یہ تعریف اختیار کی جاتی ہے کہ یہ طول اندر

بنے ہوئے کثیر الاضلاع کے محیط کی انتہا ہے جبکہ اضلاع کا طول لا انتہا کم ہو جائے۔  
 یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ سوائے شاید تنہا نقطوں کے منحنی کا ڈھال مسلسل ہے یعنی کسی  
 دو متصل نقطوں پ اور ق کے ماسوں کا باہمی میلان 'ق' کو پ  
 کے کافی قریب لانے سے اتنا کم کیا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ یہ معلوم ہو گا کہ خاص  
 قیود کے ماتحت مذکورہ بالا انتہا یگانہ ہے، نیز یہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ یہ انتہا باہر  
 بنے ہوئے کثیر الاضلاع کی متناظر انتہا کے مساوی ہے۔  
 اگر منحنی کے دو متصل نقطوں پ اور ق کے کارٹیزیائی محدد (لا، فا) اور

(لا، مفا + مفا) ہوں تو وتر پ ق کا طول ہے  $\sqrt{(مفا - لا)^2 + (مفا - فا)^2}$

دفعہ ۵ میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ اگر فا اور فرما محدود اور مسلسل ہوں تو نسبت

$\frac{مفا - لا}{مفا - فا}$  پ اور ق کے درمیان منحنی کے کسی ایک نقطہ کے لئے مشتق  
 تفاعل  $\frac{فرما}{فرلا}$  کی قیمت کے مساوی ہے۔ اسلئے  $\frac{فرما}{فرلا}$  کی مناسب قیمت منتخب کرتے

$$پ ق = \sqrt{1 + \left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^2} مفا - لا$$

اخذ بنے ہوئے کثیر الاضلاع کے محیط کی انتہائی قیمت اس لئے یہ ہے

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{فرما}{فرلا}\right)^2} فرلا \dots \dots \dots (۱)$$

جبکہ اس تکمیل کو لا کے مناسب حدود کے درمیان لیا جائے۔ اس امر کو کہ یہ انتہائی  
 قیمت یگانہ ہے دفعہ ۹۰ میں ثابت کیا گیا ہے۔  
 اگر لا کو ما کا تفاعل خیال کیا جائے تو متناظر ضابطہ ہو گا

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{فرلا}{فرما}\right)^2} فرما \dots \dots \dots (۲)$$

۲۵۰۔ منحنی کی توس کو  $s$  سے تعبیر کرو جبکہ توس کو ایک اختیاری نقطہ (۱) سے ناپنا شروع کیا گیا ہے اور دفعہ ۶۰ کی مانند رکھو  $\frac{فرلا}{فرلا} = مس$  چہا تو  $فرلا$  (۱) ہو جاتا ہے

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{فرلا}{فرلا}\right)^2} \cdot فرلا \quad (۳)$$

ضابطہ (۲) کے لئے مائل استعمال ہو جو ہے۔

$$مثال ۱۔ زنجیرو \quad ما = ج \cdot جبنر \cdot \frac{فرلا}{ج} \quad (۴)$$

$$مس = \int \sqrt{1 + \left(\frac{فرلا}{ج}\right)^2} \cdot ج \cdot فرلا = \int \sqrt{ج^2 + فرلا^2} \cdot فرلا$$

$$= \int جبنر \cdot \frac{فرلا}{ج} = ج \cdot جبنر \cdot فرلا$$

چونکہ یہ لا کے ساتھ صفر ہوتا ہے اس لئے سب سے پہلے نقطہ سے اگر  $s$  کو ناپا جائے تو

$$مس = ج \cdot جبنر \cdot فرلا \quad (۵)$$

$$مثال ۲۔ مکانی \quad ما = ۱۴ \cdot فرلا \quad (۶)$$

$$مس = \int \sqrt{1 + ۱۴^2} \cdot فرلا = ۱۴ \cdot فرلا \quad (۷)$$

شمار کنندہ کو پہلے منقح بنانے سے 'دفعہ ۶۰ کے طریقہ سے اسے مکمل کیا جاسکتا ہے۔  
رکھ لا = ۱۴ جبنر ع ، اس طرح مائل ہوتا ہے

$$۱۲ \cdot جبنر ع \cdot فرلا = ۱۴ \cdot جبنر ع \cdot فرلا = ۱۴ \cdot جبنر ع \cdot فرلا \quad (۸)$$

چونکہ ع لا کے ساتھ صفر ہوتا ہے اس سے توس کا طول ملتا ہے جبکہ توس کا طول سے ناپا جائے۔



دفعہ سابق کے (۳) کو بلحاظ تکمیل کی اوپر کی مد (لا) کے تفرق کرنے سے اسکی  
بآسانی تصدیق ہو سکتی ہے۔ اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ہا} = \frac{\text{مف س}}{\text{مف لا}} = \text{قط پہ} \dots\dots\dots (۴)$$

چونکہ جب 'ق کو پ کے لا انتہا قریب لیا جاتا ہے وتر پ ق کی  
مف لا کے ساتھ جو نسبت ہے اسکی آہٹائی قیمت قط پہ ہے اسلئے آہٹائیں

$$\text{ہا} = \frac{\text{مف س}}{\text{پ ق}} = ۱ \dots\dots\dots (۵)$$

ادھر کے اصول سے کئی ضروری ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔ سب سے پہلے اگر  
نغنی کے کسی نقطہ پ کے محدد لا 'ما قوس' میں کے تفاعل خیال کئے جائیں تو  
شکل ۱۹ دفعہ ۲۴ کے بموجب

$$\text{جم ق پ ر} = \frac{\text{پ ر}}{\text{پ ق}} = \frac{\text{مف لا}}{\text{مف س}} \times \frac{\text{پ ق}}{\text{پ ق}}$$

$$\text{جب ق پ ر} = \frac{\text{ق ر}}{\text{پ ق}} = \frac{\text{مف ما}}{\text{مف س}} \times \frac{\text{پ ق}}{\text{پ ق}}$$

$$\text{اس لئے جم پہ} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر س}} ، \text{جب پہ} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر س}} \dots\dots\dots (۶)$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\left( \frac{\text{فر لا}}{\text{فر س}} \right)^۲ + \left( \frac{\text{فر ما}}{\text{فر س}} \right)^۲ = ۱ \dots\dots\dots (۷)$$

نیز اگر لا 'ما کسی اور تغیرت کے تفاعل ہوں تو

$$\text{پ ق} = \sqrt{\left( \frac{\text{مف لا}}{\text{مف ت}} \right)^۲ + \left( \frac{\text{مف ما}}{\text{مف ت}} \right)^۲}$$

$$\text{اس لئے ہا} = \frac{\text{پ ق}}{\text{مف ت}} = \sqrt{\left( \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} \right)^۲ + \left( \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} \right)^۲}$$

$$\text{یا فرس} = \sqrt{\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^2} \dots\dots\dots (۸)$$

$$\text{اس لئے س} = \sqrt{\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^2} \dots\dots\dots (۹)$$

اسے دفعہ ۱۱۰ (۱) کی تعمیم خیال کیا جاسکتا ہے۔ وہ ضابطہ اس مفروضہ کی بنا پر حاصل کیا گیا تھا کہ قوس زیر بحث کے اندر لا کی ہر قیمت کے لئے ما کی صرف ایک قیمت ہے۔ نتیجہ (۹) اس قید سے آزاد ہے۔ صرف اتنا ضروری ہے کہ جیسے ت بڑھے نقطہ پ منحنی کو مسلسل طور پر پریم کرے۔

اسی طرح ضابطہ (۶) کسی قابل بخلیل منحنی کا طول معلوم کرنے کے لئے استعمال ہو سکتا ہے بشرطیکہ چپا سے وہ زاویہ مراد لیا جائے جو س کے بڑھنے کی سمت میں کھینچا ہوا اس محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ بنائے۔

صرف ضابطوں (۸) اور (۹) کی علم حرکت میں تعبیر مل سکتی ہیں۔ اگر ایک متحرک نقطہ کے کارٹیزیائی محدودوں لا، ما کو وقت ت کے تغاقل خیال کیا جائے تو

$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ ،  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$  محدودوں کے محوروں کی سمت میں ترکیبی رفتاریں ہیں اور اگر حقیقی رفتار ہو تو

$$ع = \sqrt{\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}\right)^2} \dots\dots\dots (۱۰)$$

ضابطے (۸) اور (۹) اس طرح ذیل کے ضابطوں کے معادل ہیں

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = ع، \text{ س} = \sqrt{ع \text{ فرت}} \dots\dots\dots (۱۱)$$

مثال۔ قطع ناقص لا = ا جب فہ، ما = ب جم فہ..... (۱۲)

$$\text{میں } \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فر فہ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فر فہ}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فر فہ}}\right)^2 = \text{ا جب فہ} + \text{ب جب فہ}$$

= (۱-ا) جب فہ جہاں ز خروج المکرز ہے۔

پس اگر قوس کو محور اصغر کے سرے سے ناپا جائے تو قوس

$$س = \int_0^{\pi} 1 - z^2 \cos^2 \theta \, d\theta \quad \text{۱۔ ز جب } \theta \text{ فرما} \dots \dots \dots (۱۳)$$

یہ تکرار ریاضی کے معمولی تغا علون کی رقوم میں (محدود صورت میں) نہیں بیان ہو سکتا۔ اسے ”دوسری قسم کا ناقصی تکرار“ کہا جاتا ہے اسے ہم  $E(e, \phi)$  سے تعبیر کریں گے۔ یہ ایک معلوم تغا عل خیال کیا جاسکتا ہے لیتھل  $E^*$  نے اسکی بدولیں مرتب کی ہیں۔ اس لئے ناقص کا کل محیط اس طرح بیان ہو سکتا ہے

$$۲ \int_0^{\pi} 1 - z^2 \cos^2 \theta \, d\theta \quad \text{۱۔ ز جب } \theta \text{ فرما} \dots \dots \dots (۱۴)$$

اس جملہ کے تکرار کو اس طرح  $E(z, \theta)$  بیان کیا جائیگا یا زیادہ اختصار کے طور پر  $E(z)$  سے۔ یہ دوسری قسم کا ”پورا ناقصی تکرار“ کہلاتا ہے۔ مقدار  $E$  تکرار کا ”مقیاس“ کہلاتی ہے۔

سلسلوں کے ذریعہ تکرار (۱۴) کی قیمت معلوم کرنے کے متعلق دیکھو دفعہ ۱۸۰۔

۱۱۲۔ قطبی محدودوں کے لحاظ سے قوسیں۔

فرض کرو کہ منحنی کے دو متصل نیم قطر  $OP$ ،  $OP'$  ہیں اور  $P$ ،  $P'$  پر نمودار کیا گیا ہے لکھو

$$OP = r, OP' = r', MF = r, MF' = r' \quad \text{۱۔ ز جب } \theta \text{ فرما}$$

تب دفعہ ۶۳ کے بموجب  $P$ ،  $P'$  متفاوت ہوگا  $MF$ ،  $MF'$  سے اور  $N$ ،  $N'$  متفاوت ہوگا  $MF$ ،  $MF'$  سے بقدر ایسی مقداروں کے جو بالترتیب  $P$ ،  $P'$  کے مقابلہ میں لا انتہا چھوٹی ہوں گی۔ اسلئے  $PP' = PN + P'N'$

Traite des Fonctions Elliptiques (1826)

✱

$$+ \text{ ”پہلی قسم کا ناقصی تکرار“ ہے } \int_0^{\pi} 1 - z^2 \cos^2 \theta \, d\theta \quad \text{۱۔ ز جب } \theta \text{ فرما اور اسے ہم}$$

$F(z, \theta)$  [  $F(e, \phi)$  ] سے تعبیر کریں گے۔ مناظر ”پورا“ تکرار [جسکی اوپر کی حد  $\frac{\pi}{2}$  ہے]  $F(z)$  سے تعبیر ہوگا۔



انتہا میں  $\sqrt{2} \text{ (مف طہ)}^2 + \text{ (مف ر)}^2$  کے ساتھ مساوات کی نسبت رکھیں  
اس سے حاصل ہوتا ہے کہ اگر طہ متبوع متغیر ہو تو

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}} = \frac{\text{ہا پ پ}}{\text{مف طہ}} = \sqrt{2 \text{ (فرطہ)}^2 + \text{ (فر ر)}^2} \dots\dots (۱)$$

$$\text{اور اس لئے س} = \sqrt{2 \text{ (فرطہ)}^2 + \text{ (فر ر)}^2} \dots\dots\dots (۲)$$

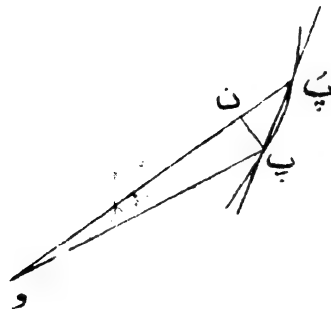
بشرطیکہ مکملہ کو طہ کے مناسب حدود کے اندر لیا جائے۔  
اگر ر اور طہ متغیر متبوع ت کے تفاعل ہوں تو

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \frac{\text{ہا پ پ}}{\text{مف ت}} = \sqrt{2 \text{ (فرت طہ)}^2 + \text{ (فرت ر)}^2} \dots\dots\dots (۳)$$

$$\text{اس لئے س} = \sqrt{2 \text{ (فرت طہ)}^2 + \text{ (فرت ر)}^2} \dots\dots\dots (۴)$$

۲۵۴

جس میں (۲) بطور خاص صورت کے شامل ہے۔



شکل ۲۴

اگر ر طہ کو قوس س کے تفاعل خیال کیا جائے اور فنا سے وہ زاویہ  
مراد ہو جو منحنی کا ماس جسے س کے بڑھنے کی سمت میں کھینچا جائے 'ستہنی نیم قطر'  
کی مثبت سمت کے ساتھ بنائے تو

$$\text{جم ن پ پ} = \frac{\text{ن پ}}{\text{پ پ}}, \text{جب ن پ پ} = \frac{\text{پ پ}}{\text{پ پ}}$$

اس لئے انتہائیں جم فہ =  $\frac{\text{فر}}{\text{فرس}}$ ، جب فہ =  $\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرس}}$ ..... (۵)

ان نتائج کی حرکیاتی توضیح ہو سکتی ہے۔ اگر ایک متحرک نقطہ کی رفتار ع ہے تبصر ہو تو سمتی نیم قطر کی سمت میں اور اس کے علی القواہم رفتاریں بالترتیب ہوں گی

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جم فہ} = \frac{\text{فر}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \\ \text{ع جب فہ} = \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فرطہ}}{\text{فرت}} \end{array} \right. \text{..... (۶)}$$

اور ضابطہ (۴) پہلے کی طرح اس کے معادل ہے

$$\text{س} = \text{ل ع فرت} \text{..... (۷)}$$

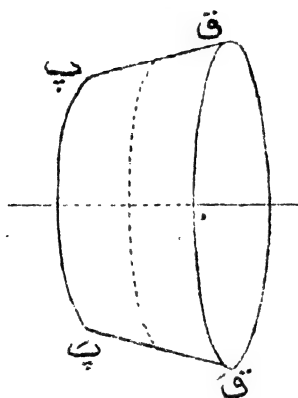
۱۱۳۔ گردشی سطحوں کے رقبے۔ منحنی سطح کے رقبہ کی عام تعریف

مرتب کرنا اور پھر یہ ثابت کرنا کہ اس رقبہ کی ایک معین قیمت ہے یہ امور ایک حد تک نفاست طلب ہیں۔ اس جگہ ہم ایسی گردشی سطح کو بحث میں لائیں گے جو محور پر علی القواہم ۲۵۵ مستوی سطحوں سے محدود ہو (محدود ہونا ضروری نہیں)۔

دائری اسطوانے سے ہم شروع کرتے ہیں۔ اسکی منحنی سطح کی یہ تعریف ہو سکتی ہے کہ یہ اندر بنے ہوئے منشور کے طرفی رخوں کے رقبوں کے مجموعہ کی انتہائی قیمت ہے۔ ان سب رخوں کا ایک ہی طول ہے اور ان کا مجموعہ اس مشترک طول اور منشور کی چلیبی تراش کے محیط کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ انتہائیں یہ محیط اسطوانہ کا محیط ہو جاتا ہے۔ اس لئے قائم اسطوانہ کی منحنی سطح جس کا نیم قطر  $r$  اور ارتفاع  $h$  ہو ۲۲۱ فہ ہے۔

اس کے بعد مخروط کی سطح کو جو محور پر عمود دار دو مستویوں کے درمیان گھری ہوئی ہے۔

اس کے اندر ناقص مخروط مضلع بنایا جاسکتا ہے جس کے قاعدے متشابه اور متشابه الوضع منتظم کثیر الاضلاع ہیں جو احاطہ کرنے والے دو دائروں کے اندر بنائے گئے ہیں زیر بحث منحنی سطح اس ناقص مخروط مضلع کے طرفی رقبہ کی انتہا خیال کیجا سکتی ہے



شکل (۶۵)

یہ رقبہ مخروطوں کی ایک تعداد پر مشتمل ہے جن سب کا ارتفاع مشترک ہے یعنی ان کے تنواری اضلاع کے درمیان عمودی فاصلہ۔ اس لئے یہ رقبہ اس مشترک ارتفاع اور ان دو کثیر الاضلاعوں کے محیطوں کے اوسط حسابی کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ انتہا میں یہ محیط جائزہ دائروں کے محیط بن جاتے ہیں اور یہ مشترک ارتفاع دائروں سے گھٹے ہوئے مخروطوں کا کون بن جاتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں خط مستقیم پ ق کے ایک ایسے محور کے گرد گھومنے سے جو اس کی مستوی میں واقع ہے جو منحنی سطح پیدا ہوتی ہے اس کا رقبہ پ ق اور پ اور ق کے مرتمہ دائروں کے محیطوں کے اوسط حسابی کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ اور یہ وہی بات ہے کہ یہ رقبہ پ ق اور اسکے وسطی نقطہ کے مرتمہ دائرہ کے محیط کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

اس کے بعد وہی سطح جو منحنی مآ = فسا (۶) ..... (۱)

کی قوس جو رلا کے گرد گردش کرنے سے پیدا کرتی ہے۔ اس قوس میں نقطوں کی کوئی تعداد نہ ہو اور انکو سیدھے خطوں سے ملا کر ایک کھلا کثیر الاضلاع حاصل کرو یعنی سطح کی یہ تعریف اختیار کر لی جاتی ہے کہ کثیر الاضلاع کے ضلعوں سے جو رقبے مرتب ہوتے ہیں ان کے مجموعہ کی یہ انتہائی قیمت ہے جبکہ اضلاع کے طول کو لا انتہا کم کیا جائے۔ اس لئے اگر کمون منحنی کے کسی عنصر مف سے کا وتر پ ق ہو اور پ ق کے وسطی نقطہ کا معین ما ہو تو منحنی سطح مجموعہ  $\pi \times 2$  ما  $\times$  پ ق کی انتہائی قیمت ہوگی۔ انتہائی پ ق مف سے کے ساتھ نسبت مساوات رکھتا ہے اور ما کو منحنی کا معین خیال کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح سطح  $\pi \times 2$  (ما  $\times$  مف سے) کی انتہائی قیمت کے مساوی ہونی یعنی سطح ہے

$$\pi \times 2 \text{ ما فرس} \dots \dots \dots (۲)$$

جبکہ کلمہ کو سے کی مناسب وسعت پرایا گیا ہے۔

مثال ۱۔ کرہ کی صورت میں کمون منحنی کے کسی نقطہ کے محدود

$$\text{لا} = \text{ا} \text{ جم طہ} \text{ ما} = \text{ا} \text{ جب طہ} \dots \dots \dots (۳)$$

$$\text{جس سے} \dots \dots \dots \frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}} = \text{ا} \dots \dots \dots (۴)$$

پس منطقہ کی سطح جو محور لا پر عمود وارستویوں سے گھرا ہوا ہو یہوگی

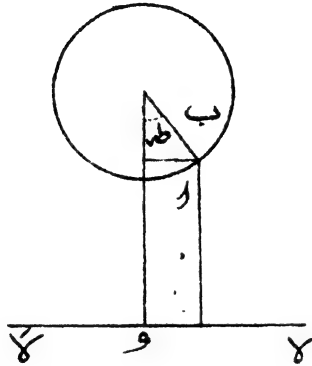
$$\pi \times 2 \text{ ا} \text{ جب طہ فرطہ} = \pi \times 2 \text{ ا} \text{ (جم طہ جم طہ)} = \pi \times 2 \text{ ا} \text{ (لا لا)} \dots \dots (۵)$$

جہاں لا حقہ احاطہ کرنیوالے دائروں سے متعلق ہیں۔ اس لئے کرہ کا منطقہ رقبہ میں اس طوطہ اسطوانہ کے متناظر منطقہ کے مساوی ہے جس کا محور احاطہ کرنے والے دائروں کے مستویوں پر عمود وار ہے۔ خاص صورت میں کرہ کی کل سطح  $\pi \times 2 \text{ ا} \times 2 \text{ ا} = \pi \times 2 \text{ ا}^2$

مثال ۲۔ ایک دائرہ کا نیم قطر پ ہے۔ اس کی سطح میں ایک خط مستقیم ہے جسکا فاصلہ دائرہ کے مرکز سے ا ہے۔ دائرہ کو اس خط کے گرد پھرانے سے جو چھلہ حاصل ہوتا ہے اسکی سطح دریافت کرو۔

$$\text{یہاں} \dots \dots \dots \text{لا} = \text{ب جب طہ} \text{ ما} = \text{ا} - \text{ب جم طہ} \text{ فرس} \text{ ب} \dots \dots (۶)$$

پس  $\pi r$  ما فرس =  $\pi r$  ب (ا۔ ب جم طہ) فرطہ..... (۷)



شکل (۶۶)

طہ کے حدود ہیں۔ اور  $\pi r$  او سطح حاصل ہوتی ہے  $\pi r \times$  ب  $\pi r$  ا جو ب قطر کے قائم اسطوانہ کی تختی سطح کے مساوی ہے جس کا طول  $(\pi r)$  ہو اور یہ طول اس دائرہ کے محیط کے مساوی ہے جو کون دائرہ کا مرکز مرسم کرتا ہے۔  
مثال ۳۔ ناقص لا = ا جب فضا ما = ب جم فضا کو محور اعظم کے گرد پھرانے سے جو مجسم حاصل ہوتا ہے اسکی سطح دریافت کرو۔

۲۵۷

$$\pi r \text{ ما فرس} = \pi r \text{ ب} \frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}}$$

$$\pi r \text{ ب} \frac{\text{ا۔ ز جب فضا}}{\text{فر (جب فضا)}} = \pi r \text{ ب} \frac{\text{ا۔ ز جب فضا}}{\text{فر (جب فضا)}} \dots (۹)$$

دفعہ ۱۱ کی رو سے۔ اب رکھو ز جب فضا = جب طہ..... (۱۰)

$$\pi r \text{ ب} \frac{\text{ا۔ ز جب فضا}}{\text{فر (جب فضا)}} = \pi r \text{ ب} \frac{\text{ا۔ ز جب فضا}}{\text{فر (جب فضا)}} \dots (۹)$$

..... (۱۱)

کل سطح دریافت کریں گے اے فضا =  $\frac{\pi}{4}$  کے درمیان یا



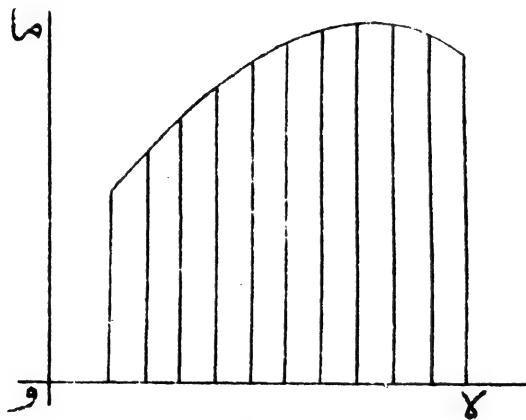
ہوں تو منحرفوں کا مجموعہ ہے

$$\frac{1}{2} (a_1 + a_2) h + \frac{1}{2} (a_2 + a_3) h + \dots + \frac{1}{2} (a_{n-1} + a_n) h$$

$$= h \left\{ \frac{1}{2} (a_1 + a_2) + \frac{1}{2} (a_2 + a_3) + \dots + \frac{1}{2} (a_{n-1} + a_n) \right\} \dots (1)$$

یعنی پہلے اور آخری عین کے اوسط حسابی میں درمیانی معینوں کا مجموعہ جمع کرو اور  
نتیجہ کو مشترک وقفہ سے ضرب دو۔

اس طرح سے جو قیمت حاصل ہوگی وہ سرسجھا اصلی رقبہ سے زیادہ ہوگی  
اگر منحنی محور کا کسی جانب محدب ہو اور کم ہوگی اگر مقعر ہو۔



شکل (۶۰)

ایک اور طریقہ جو ابتدا میں نیوٹن اور گوٹس نے دیا وہ یہ ہے کہ ما کے لئے  
(ن-۱) ویں درجہ کا منطق تکمیلی جملا اختیار کیا جائے یعنی







مثال - ضابطہ  $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$  ..... (۱۲)

سے  $\pi$  کی قیمت محسوب کرو۔

تکمیل کی وسعت کو دس مساوی وقفوں میں تقسیم کرو یعنی  $h = 0.2$  تو

$$x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8, x_5 = 1.0$$

$$f(x_0) = 1.000000, f(x_1) = 0.980195, f(x_2) = 0.960784, f(x_3) = 0.941753, f(x_4) = 0.923081, f(x_5) = 0.904802$$

$$f(x_6) = 0.886933, f(x_7) = 0.869469, f(x_8) = 0.852399, f(x_9) = 0.835618, f(x_{10}) = 0.819121$$

$$f(x_{11}) = 0.802896, f(x_{12}) = 0.786924, f(x_{13}) = 0.771203, f(x_{14}) = 0.755722, f(x_{15}) = 0.740480$$

$$f(x_{16}) = 0.725377, f(x_{17}) = 0.710411, f(x_{18}) = 0.695581, f(x_{19}) = 0.680886, f(x_{20}) = 0.666325$$

$$\text{اس لئے } \pi = \frac{1}{10} [f(x_0) + f(x_{20}) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{19}))]$$

$$= \frac{1}{10} [1.000000 + 0.819121 + 2(0.980195 + 0.960784 + \dots + 0.666325)]$$

ضابطہ (۱۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\pi = \frac{1}{10} (1.000000 + 0.819121 + 2(0.980195 + 0.960784 + \dots + 0.666325))$$

$$= 3.141592653589793$$

صرف سات ہندسے رکھنے سے  $\pi = 3.141593$

یہ نتیجہ آخری ہندسہ تک درست ہے۔

$$\text{ضابطہ (۱) سے حاصل ہوتا ہے } \pi = \frac{1}{10} [f(x_0) + f(x_{20}) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{19}))]$$

یعنی  $\pi = 3.141592653589793$  جو تقریباً ۲۰۰۰ میں بقدر ایک حصہ کے چھوٹا ہے۔

۱۱۵ - اوسط قیمتیں - فرض کرو کہ سمت (ب-د) کے اندر لاکھ

ن متساوی انصاف قیمتوں کے جواب میں ایک تفاعل فضا (لا) کی قیمتیں

ما' ما' ..... مان ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ تفاعل کی قیمتیں لا کی ان قیمتوں کے جواب میں ہیں جو

ن مساوی وقفوں (ھ) کے وسطی نقاط کو تعبیر کرتے ہیں جن میں سمت تقسیم کی گئی ہے۔ جس انتہائی قیمت کی طرف یہ اوسط حسابی

(۱)  $\frac{1}{n} (p_1 + p_2 + \dots + p_n)$  مائل ہوتی ہے جبکہ  $n$  لا انتہائی رہتا ہے اس کو تفاعل کی ”اوسط قیمت“ کہتے ہیں سمت (ب-۱) پر۔

چونکہ  $h = \frac{1}{n}$  (ب-۱) جملہ (۱) اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$h = \frac{p_1 h + p_2 h + \dots + p_n h}{n}$$

اور اسکی انتہائی قیمت جبکہ  $n$  بے  $\infty$   $h \rightarrow 0$  یہ ہے

$$\int_0^1 f(x) dx$$

(۲)  $\frac{1}{n} (p_1 + p_2 + \dots + p_n)$

ب-۱ ہندسی تعبیر کے موافق اوسط قیمت اس مستطیل کا ارتفاع ہے جس کا قاعدہ  $p_1 + p_2 + \dots + p_n$  اور جس کا رقبہ اس رقبہ کے مساوی ہے جو منحنی  $y = f(x)$  اطراف کے مغنیوں اور محور  $x$  سے گھرا ہوا ہو۔ دیکھو شکل ۴۹ دفعہ ۹۱۔  
دفعہ ۹۱ (۳) کا سلسلہ اب یوں بیان ہو سکتا ہے۔ تغیر متبوع کی کسی وسعت ایک مسلسل تفاعل کی اوسط قیمت، اسی سمت کے اندر تغیر متبوع کی ایکٹ ایک قیمت کے لئے تفاعل کی قیمت کے مساوی ہے۔  
دفعہ ۱۱۳ کے مختلف ضابطوں کی اب یہ تعبیر ہو سکتی ہے کہ ان سے ایک معلوم سمت میں تفاعل کی اوسط قیمت کے لئے تقریری جملے تفاعل کی ایسی قیمتوں کے سلسلہ کی رقوم میں معلوم ہوتے ہیں جو سمت بھی ہیں متساوی الفصل و فصول پر لگتی ہیں۔ مثلاً تین یا چار ایسی قیمتوں کی رقوم میں اوسط قیمتیں کو لکھنے کے طریقہ سے بالترتیب یہ معلوم ہوتی ہیں

$$\frac{1}{4} (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \quad \frac{1}{8} (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8)$$





$$(۲) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{L} &= \frac{1}{n} (L_1 + L_2 + \dots + L_n) = \frac{\sum (L_i)}{n} \\ \bar{M} &= \frac{1}{n} (M_1 + M_2 + \dots + M_n) = \frac{\sum (M_i)}{n} \end{aligned} \right.$$

چونکہ یہ ارتباط خطی ہیں اور کارٹیزیائی محوروں کے استعمائے خطی ضابطوں سے عمل میں لائے جاتے ہیں اس لئے یہ باسانی معلوم ہوتا ہے کہ کسی خط سے خط کا فاصلہ اسی خط سے دئے ہوئے نقطوں کے فاصلوں کے اوسط حسابی کے مساوی ہے۔ البتہ ان فاصلوں کو مناسب علامتوں کے ساتھ لیا جائے جو جب اس کے کہ یہ خط کے ایک جانب واقع ہوں یا دوسری جانب۔ اسی طریقہ سے، ایک مستوی منحنی کا یا مستوی رقبہ کا ایک اوسط مرکز ہوتا ہے جس کا فاصلہ اس مستوی میں کے کسی خط سے منحنی یا رقبہ کے صفاری اجزاء کے فاصلوں کے اوسط (ذوقہ ۱۱۵ کے معنی میں) کے مساوی ہوتا ہے۔ پس منحنی کے لئے

$$(۳) \quad \bar{L} = \frac{\sum (L_i \text{ مف س})}{\sum \text{مف س}}, \quad \bar{M} = \frac{\sum (M_i \text{ مف س})}{\sum \text{مف س}} \dots$$

اور رقبہ کی صورت میں

$$(۴) \quad \bar{L} = \frac{\sum (L_i \text{ مف ق})}{\sum \text{مف ق}}, \quad \bar{M} = \frac{\sum (M_i \text{ مف ق})}{\sum \text{مف ق}} \dots$$

جہاں مف ق رقبہ کا جزو یا عنصر ہے۔ انتہا میں یہ مجموعے شکلوں کی شکل اختیار کر لیتے ہیں۔

مثال ۱۔ دائری قوس کی صورت میں، اگر مبدأ کو مرکز، محور  $\bar{L}$  کو وسطی خط پر لیا جائے تو  $\bar{M} = 0$ ، اردوے تشاکل۔ لہذا  $\bar{L} = \frac{\sum (L_i \text{ مف س})}{\sum \text{مف س}}$ ، اس طرح

$$(۵) \quad \bar{L} = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha L \, d\alpha = \frac{\int_0^\alpha L \, d\alpha}{\alpha} \quad \text{جب } \bar{M} = 0$$

اگر  $\alpha$  وہ زاویہ ہو جو کل قوس کے سامنے مرکز پر بنتا ہے۔

جیسے عم بڑھتا ہے لامتناہی چوٹی قیمت سے ہیکہ لا گھٹتا ہے اس سے صفر تک۔

$$\text{نصف دائرہ کے لئے عم} = \frac{3}{4} \text{ اور لا} = \frac{2}{11} \text{ اس لئے } 1.0634 = 1$$

مثال ۲۔ مکانی ما = ۱۴ لا ..... (۶)  
کے قطعہ کے رقبہ کے لئے جو دو ہرے معین لا = ف سے گھرا ہوا ہو

$$\text{لا} = \frac{\text{ف لا فز لا}}{\text{ف لا فز لا}} = \frac{\text{ف لا فز لا}}{\text{ف لا فز لا}} = \frac{3}{5} \text{ ف ..... (۷)}$$

اوسط مرکز کے تغیل کی سرکایتیں ابعادی شکلوں کی صورت میں بھی توسیع کی جاسکتی ہے،  
لیکن یہاں خط سے فاصلوں کی بجائے سطح مستوی سے فاصلے لئے جانے چاہئیں۔  
مثلاً سطح تختی کی صورت میں

$$\text{لا} = \frac{\text{ما مفس}}{\text{مفس}} \text{ ما} = \frac{\text{ما مفس}}{\text{مفس}} \text{ ہی} = \frac{\text{ما مفس}}{\text{مفس}} \text{ ہی مفس}$$

(۸) .....

جہاں مفس سطح کا جزو ہے۔ اسی طرح حجم کے لئے

$$\text{لا} = \frac{\text{ما مفسح}}{\text{مفسح}} \text{ ما} = \frac{\text{ما مفسح}}{\text{مفسح}} \text{ ہی} = \frac{\text{ما مفسح}}{\text{مفسح}} \text{ ہی مفسح}$$

(۹) .....

جہاں مفسح حجم کا جزو ہے۔  
مگر دہی سطح یا مجسم کی صورت میں اوسط مرکز تشاکل کے محور پر ہوتا ہے، اگر اس کو  
محور لا مانا جائے تو صرف لا کی قیمت محسوب کرنا باقی رہ جاتا ہے۔ اگر کون مخنی  
کامین ما ہو تو (۸) میں رکھو مفس = ۲۲ ما مفس = ۲۲ مفس کے طلقہ نما  
جزو کا رقبہ ہوگا جسکے سب نقطے مستوی لا = سے مساوی فاصلہ پر ہیں۔

اس لئے

$$(۱۰) \dots\dots\dots \frac{r^2 \text{ لا} \times \pi \text{ ما فرس}}{r^2 \text{ لا} \text{ ما فرس}} = \frac{r^2 \text{ لا} \times \pi \text{ ما فرس}}{r^2 \text{ لا} \text{ ما فرس}} \dots\dots\dots$$

اسی طرح (۹) میں رکھو مف ح =  $\pi$  ما مف لا تو حاصل ہوگا

$$(۱۱) \dots\dots\dots \frac{r^2 \text{ لا} \times \pi \text{ ما فر لا}}{r^2 \text{ لا} \text{ ما فر لا}} = \frac{r^2 \text{ لا} \times \pi \text{ ما فر لا}}{r^2 \text{ لا} \text{ ما فر لا}} \dots\dots\dots$$

مثال ۳۔ کروئی سطح کے منقطع کے لئے رکھو

$$(۱۲) \dots\dots\dots \frac{r^2 \text{ لا} \times \pi \text{ ما فر لا}}{r^2 \text{ لا} \text{ ما فر لا}} = \frac{r^2 \text{ لا} \times \pi \text{ ما فر لا}}{r^2 \text{ لا} \text{ ما فر لا}} \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \frac{r^2 \text{ لا} \times \pi \text{ ما فر لا}}{r^2 \text{ لا} \text{ ما فر لا}} = \frac{r^2 \text{ لا} \times \pi \text{ ما فر لا}}{r^2 \text{ لا} \text{ ما فر لا}} \dots\dots\dots$$

$$(۱۳) \dots\dots\dots \frac{r^2 \text{ لا} \times \pi \text{ ما فر لا}}{r^2 \text{ لا} \text{ ما فر لا}} = \frac{r^2 \text{ لا} \times \pi \text{ ما فر لا}}{r^2 \text{ لا} \text{ ما فر لا}} \dots\dots\dots$$

اگر عا بہا زاویہ طما کے حدود ہوں اور لا لا عا ط دائروں کے فیصلے ہوں۔  
اس لئے منقطع کا اوسط مرکز محور پرہ انط دائروں کے استویوں کے عین وسط میں واقع ہوتا  
مثلاً نیم کروئی سطح کا اوسط مرکز غوری نصف قطر کی تنصیف کرتا ہے۔

یہ نتائج کرہ اور لغانی اسطوانہ کے متناظر منطوقوں کے رقبوں کے مساوی ہونے سے  
حاصل ہو سکتے تھے (دفعہ ۱۱۳ مثال ۱)۔

مثال ۴۔ مجسم مستدیر غرو ط کی صورت میں جبکہ مبدأ رأس پر ہو تلاش کا رقبہ ایسے بدلنا ہے  
جیسے لا پس

$$(۱۴) \dots\dots\dots \frac{r^2 \text{ لا} \times \pi \text{ ما فر لا}}{r^2 \text{ لا} \text{ ما فر لا}} = \frac{r^2 \text{ لا} \times \pi \text{ ما فر لا}}{r^2 \text{ لا} \text{ ما فر لا}} \dots\dots\dots$$

اگر ف ارتفاع ہو۔

مثال ۵۔ ناقصی مکانی نا



$$(۱۵) \dots\dots\dots \frac{م^۲}{پ} + \frac{ی}{ق} = لا^۲$$

کے قطعہ کے لئے جو لا = ف سے کٹتا ہے چونکہ تراش کا رقبہ ایسے بدلتا ہے جیسے لا<sup>۲</sup> اس لئے جیسا کہ دفعہ ۸۔ مثال ۱ میں

$$(۱۶) \dots\dots\dots \frac{ک^۲ لا^۲ فرلا}{م^۲ لا^۲ فرلا} = \frac{۲}{۳} ف$$

مثال ۶۔ نصف قطر کے نصف کرہ کے لئے رکھو ما<sup>۲</sup> = لا<sup>۲</sup>۔ لا<sup>۲</sup> (سطح

۳۶۶

$$(۱۷) \dots\dots\dots \frac{ک^۲ لا^۲ (لا^۲ - لا^۲) فرلا}{ک^۲ لا^۲ (لا^۲ - لا^۲) فرلا} = \frac{۳}{۸} ا$$

اسی ضابطہ سے ناقص نما

$$(۱۸) \dots\dots\dots ۱ = \frac{ی}{ج} + \frac{م^۲}{ب} + \frac{لا^۲}{ا}$$

کے اس نصف کے اوسط مرکز کا مقام معلوم ہوتا ہے جو مستوی مای کے دائیں جانب واقع ہے کیونکہ اس صورت میں ف (لا) ایسے بدلتا ہے جیسے لا<sup>۲</sup>۔ لا<sup>۲</sup> دیکھو دفعہ ۱۰۔ مثال ۲۔

۱۱۷۔ پیمپس (PAPPUS.) کے مسئلے۔

(۱) اگر ایک مستوی منحنی کی قوس اپنی سطح میں کے ایک محور کے گرد گھومے مگر اسکو کاٹے نہیں تو سطح جو اس طرح پیدا ہوتی ہے وہ قوس کے طول اور اوسط مرکز کے راستہ کے طول کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ فرض کرو کہ محور کا گھماؤ کے محور پر منطبق ہوتا ہے اور کون منحنی کا معین ما ہے۔ دفعہ ۱۱۳ کی رو سے پوری گردش میں جو سطح پیدا ہوتی ہے وہ  $\pi r^2$  کی ما فرس کے مساوی ہے جہاں تکمیل کی قوس پر لیا جائے۔

اگر قوس کا وسط مرکز مآ ہو تو مآ =  $\frac{ل مافرس}{ل فرس}$  دفعہ ۱۱۶ کی رو سے۔

اس لئے  $\pi r$  ل مافرس =  $\pi r$  مآ  $\times$  ل فرس ..... (۱)  
جو مسئلہ مذکورہ ہے۔

(۲) اگر ایک مستوی رقبہ کو اپنی سطح میں کے ایک محور کے گرد پھرایا جائے جو اس کے لئے نہیں تو حجم جو اس طرح پیدا ہوتا ہے وہ رقبہ اور اس کے وسط مرکز کے راستہ کے طول کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ مف ق رقبہ کا عنصر ہے۔ پوری گردش میں جو حجم پیدا ہوتا ہے وہ ہے

ہذا  $\pi r$  مآ  $\times$  مف ق  
اگر رقبہ کی کمیت کا مرکز مآ ہو تو

مآ = ہذا  $\frac{\pi r$  مآ مف ق}{ $\pi r$  مف ق} ، دفعہ ۱۱۶ کی رو سے

اس لئے ہذا  $\pi r$  مآ  $\times$  مف ق =  $\pi r$  مآ  $\times$  ہذا  $\pi r$  مف ق ..... (۲) ۲۶۴  
جو مسئلہ مطلوبہ ہے۔\*

گردشوں کو پورا خیال کیا گیا ہے لیکن صریحاً یہ قید ضروری نہیں۔  
ان مسائل کے عکس مستوی قوس، مستوی رقبہ کے وسط مرکز دریافت کر نیکی لئے استعمال ہو سکتے ہیں جبکہ ان کی گردش سے پیدا شدہ سطح اور حجم بلا واسطہ طریقہ پر معلوم ہوں۔ دیکھو مثال ۳ آگے۔

\* یہ سائل پیس کے رسالہ علم میں موجود ہیں۔ پیس نے مشہور ریاضی دان  
تھا۔ نئے سرے سے گلڈن (Guilidus) ان مائل کو بتایا کیا۔ دیکھو

(De centro gravitatis) (1635—1642).

(Ball, History of Mathematics)

مثال ۱۔ دائرہ نصف قطر ب، اپنی سطح میں کے ایک خط کے گرد گھوم کر پھلا پیدا کرتا ہے۔ دائرہ کے مرکز کا فاصلہ خط سے اے ہے۔ سطح اور حجم دریافت کرو۔

$$\text{سطح ہے } \pi \times \text{ب}^2 = 1 \pi \times 2^2 = 4 \pi \text{ ا ب}$$

حجم ہے  $\pi \times \text{ب}^2 \times \text{ا} = 1 \pi \times 2^2 \times 1 \text{ ا ب}$ ۔ مقابلہ کرو دفعہ ۱۰، مثال ۳ اور دفعہ ۱۱، مثال ۲ کے ساتھ۔

مثال ۲۔ سکائی فاک = ۴ ولا کا قطعہ جو دوہرے معین ۷ = ف سے گھرا ہوا ہے اس معین کے گرد گھومتا ہے۔

اگر دوہرے معین کا طول ۲ ک ہو تو قطعہ کا رقبہ  $\frac{۲}{۵} \times \text{ف} \times \text{ک}$  ہے (دفعہ ۱) اور اس کے اوپر مرکز کا فاصلہ معین سے  $\frac{۱}{۵} \times \text{ف}$  ہے (دفعہ ۱۲، مثال ۲) اس لئے حجم جو پوری گردش سے پیدا ہوتا ہے یہ ہے

$$\frac{۲}{۵} \times \text{ف} \times \text{ک} \times \pi \times \frac{۲}{۵} = \pi \times \frac{۱۶}{۲۵} \times \text{ف} \times \text{ک}$$

مثال ۳۔ نیم دائری قوسی جو اس کے سروں کے ملانے والے قطر کے گرد گھومتی ہے اسکے لئے

$$\pi \times \text{ا} \times \pi \times \text{ا}^2 = \pi \times \text{ا}^2 \times \text{ا} \text{ جس سے } \text{ا} = \frac{۲}{۳}$$

نیم دائری رقبہ جو اپنے احاطہ کرنے والے قطر کے گرد گھومتا ہے اسکی صورت میں

$$\frac{۱}{۲} \times \pi \times \text{ا}^2 \times \pi \times \text{ا} = \pi \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۸}{۲۷}$$

ایسی طرح کے حساب سے (کسی عمومی تراش کے) منشور یا اسطوانہ کے حجم کے لئے بنتوی سرور سے گھرا ہوا ہوا سادہ صاف شکل سکتا ہے۔

پہلے ہم یہ فرض کریں گے کہ ایک سراج سے قاعدہ کہا جائے گا طول پر عمود ہے۔

نہیں کرو کہ قاعدہ کا کوئی نقطہ پس ہے اور فرض کرو کہ معین پ پ کا طول ی ہے جہاں پ پ طول کے متوازی کھینچا گیا ہے اور یہ مقابل کے سرے سے پ پ پر آتا ہے۔ نیز فرض کرو کہ بائل سرے کے مرکز کا معین جی ہے۔

اگر پ اور پ پر رقبہ کے متناظر اجزا مفاق اور مفاق ہوں تو

$$\text{حی} = \frac{\text{حی مفق}}{\text{حی مفق}} = \frac{\text{حی مفق}}{\text{حی مفق}}$$

کیونکہ مفق، مفق کا قائم نفل ہے، اس لئے اسی بار ہی نسبت مستقل ہے۔

اس لئے مجسم کا حجم = (حی x مفق) = حی x مفق ... (۳)  
یعنی حجم قاعدہ کے بقبہ اور مقابل کے رقبہ کے اوسط مرکز کے معین کے حامل ضرب کے مساوی ہے۔

جس منشور یا اسطوانہ کے دونوں سرے بالی ہوں اس کو دو ایسے منشوروں یا اسطوانوں کا مجموعہ یا فرق تصور کیا جاسکتا ہے جن میں سے ہر ایک کا ایک سر اسطوانہ کی علی القوائم ہو۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تمام صورتوں میں حجم، چلیپی تراش اور دو سروں کے اوسط مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کے حامل ضرب کے مساوی ہے۔

مثال ۴۔ فائدہ کی شکل کے مجسم کا حجم جو ایک قائم مستدیر اسطوانہ سے قاعدہ کے مرکز میں سے گزرنے والے مستوی سے کاٹا جائے اور قاعدہ کی سطح کے ساتھ زاویہ عماد بنا ہے یہ ہے

$$\frac{1}{4} \pi r^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \pi r^2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \pi r^2$$

پیمپس کے مسئلوں کی کئی طرح سے تعمیم ہو سکتی ہے لیکن دوسرے مسئلہ کی صیغہ یں توسیع کا یہاں کر دینا کافی ہوگا۔

اگر کوئی مستوی رقبہ، جو مستقل ہو یا مسلسل طور پر بدلنے والا، فضا میں کسی طور پر حرکت کرے لیکن اس طرح کہ مستوی کے متصل نفل ایک دوسرے کو رقبہ کے اندر نہ قطع کریں تو حجم نکلیں شدہ مساوی ہے

$$\text{حی میں فرما} \dots \dots \dots (۴)$$

کے جہاں میں رقبہ ہے اور فرما نفل ہے مستوی پر کے عماد پر، رقبہ کے اوسط مرکز کے طریق (لوکس) کے چھوٹے جزو کا۔ اگر اس طرح کا جزو فرما ہو اور فرما

اور مستوی کے عماد کے درمیان زاویہ طما ہو تو یہ ضابطہ یوں لکھا جاسکتا ہے

۱) س جم طما فرس ..... (۵)  
پہلے تین ابعادی جواب ہے مسئلہ دفعہ ۱۰۳ کا جو اس امر سے متعلق ہے کہ ایک  
متحرک خط اپنی حرکت میں کتنا رقبہ عبور کرتا ہے۔ مسئلہ زیر بحث اوپر کے ثابت شدہ مسئلہ کا  
نیچہ صریح ہے۔

۱۱۸ - ضعیفی تکملے - اس کتاب کی بحث زیادہ تر ایک متغیر کے تفاعلوں

۲۶۹

تک محدود ہے اور اس لئے جہاں تک تکملی احصا کا تعلق ہے یہ ایسے مسائل پر  
بحث کرتی ہے جو ایک مکمل پر منحصر ہیں یا ایک مکمل پر لا کے منحصر کئے جاسکتے ہیں  
لیکن ضعیفی تکملے مضمون کے طبعی استعمال میں ترقیم وغیرہ کے طور پر اس کثرت سے  
استعمال ہوتے ہیں کہ ان کے متعلق چند تشریحات کا یہاں دیدن یا سود مند ہو گا۔ نظری  
امور پر صرف سرسری توجہ کی جائے گی۔ باضابطہ بحث کے لئے دفعہ ۹۰ کے طریقہ کی  
مناسب تر نیم کجا سکتی ہے۔

فرض کرو کہ 'ی' متبوع تغیروں 'لا'، 'ما' کا مسلسل اور وحید القیمت تفاعل ہے

ی = ف (ما، لا) ..... (۱)

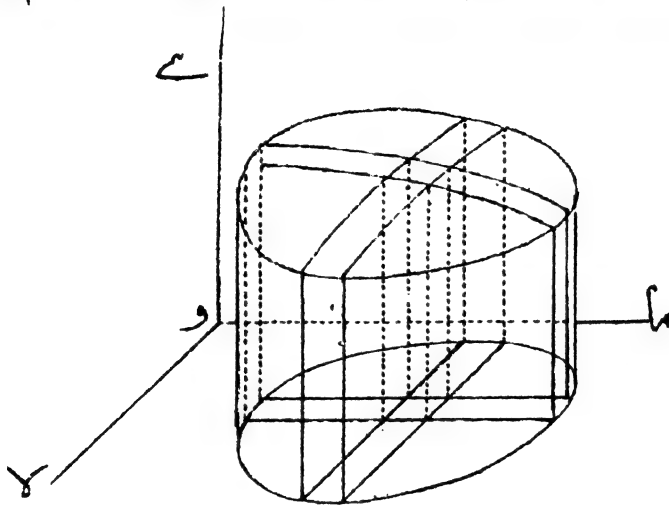
اسکی ہندسی تعبیر یہ ہو سکتی ہے کہ یہ ایک سطح کی مساوات ہے (دفعہ ۳۴)۔ حوالہ  
کے مستوی 'لا' یا 'یس' کوئی محدود طبقہ 'س' کو اور فرض کرو کہ ایک اسطوانی سطح ایک خط  
منتقیم کے ذریعہ پیدا کی جاتی ہے جو ہمیشہ 'س' کے محیط سے ملتا ہے اور 'ی' کے محور  
متوازی رہتا ہے۔ اس حجم 'ح' پر غور کرو جو اس اسطوانہ، مستوی 'لا' یا 'ما' اور سطح (۱)  
کے درمیان گھرا ہے۔ دیکھو شکل ۶۸ صفحہ ۳۶۹۔

اگر طبقہ 'س' کو رقبہ کے اجزاء 'مف ق'، 'مف ق'، 'مف ق' .....  
میں تقسیم کیا جائے اور ان اجزاء کے اندر کے کسی اختیاری نقطوں سے کھینچے ہوئے

سطح (۱) کے معین 'ی'، 'ی'، 'ی' ..... ہوں تو محوروں کو علی القوائم فرض

کر کے مجموعہ 'ی' مف ق + 'ی' مف ق + 'ی' مف ق + ..... (۲)

۲۷۰ سے مشوروں کے ایک نظام کا کل حجم لیگا جن کے ارتقاع 'ی'، 'ی'، 'ی'، ..... ہیں اور جو قاعدوں 'مف ق'، 'مف ق'، 'مف ق'، ..... پر قائم ہیں۔



شکل (۶۸)

اور اگر تفاعل فہ (لا، ما) بعض شرائط کو پورا کرے جو عام طور پر تفاعل پورا کرتے ہیں\* تو اوپر کا مجموعہ جبکہ 'مف ق'، 'مف ق'، 'مف ق'، ..... کے ابعاد کو لا انتہا کم کیا جائے ایک یگانہ انتہائی قیمت کی طرف مستحق ہوگا۔ یہ انتہا حجم ح ہے اگر طبقہ میں کے چھوٹے حصے عم اور لا اور ما کے متوازی ہوں تو اجزا 'مف ق'، 'مف ق'، 'مف ق'، ..... نمونہ 'مف لا مف ما' کے مستطیلی رقبے ہونگے اور مجموعہ (۲)

۳ ۳ ی مف لا مف ما ..... (۳)

\* تسلسل کی شرط جس کا پہلے سے ذکر کیا گیا ہے وہ کافی ہے لیکن ثبوت میں سہولت پیدا ہوگی اگر یہ زائد شرط شریک کر دی جائے کہ مستوی لا ما کے کسی محدود رقبہ کے اندر فہ (لا، ما) کی اعظم اور اقل قیمتیں تعداد میں محدود ہیں۔ دیکھو دفعہ ۹۰ -

سے تعبیر ہو سکیگا جہاں  $\int$  دوبار آتا ہے کیونکہ مجموعہ دو ابجا دیں لیا جاتا ہے۔  
اس مجموعہ کی انتہائی قیمت ذیل کی علامت سے تعبیر ہوگی۔

$$\int \int f(x,y) dx dy \quad (۴) \quad \dots \text{فرما}$$

اور حجم کے لئے ضابطہ ہوگا  $\int \int f(x,y) dx dy = \int \int f(x,y) dx dy$  (۵).....  
بائیں جانب کا جملہ ”دوسرا کلمہ“ کہلاتا ہے۔ اسکی قیمت کی تعیین نہیں ہو سکتی جب تک کہ متغیروں  $x$ ،  $y$  کی وسعت جسکی  $f(x,y)$  کے محیط سے حد بندی ہوتی ہے، تعیین نہ ہو سکے۔

حجم  $\int \int f(x,y) dx dy$  ایک اور طرح سے بھی حاصل ہو سکتا ہے۔ اگر  $f(x,y)$  سطح کی ایک تراش کا رقبہ ہو جو  $x$ ،  $y$  کے متوازی ایک مستوی سے ملتی ہے جس کا فصلہ  $z$  ہے تو دفعہ ۱۰۶ کی رو سے

$$\int \int f(x,y) dx dy = \int \int f(x,y) dx dy \quad (۶) \quad \dots$$

جہاں رقبہ  $f(x,y)$  سے متعلق  $z$  کے حدود  $a$ ،  $b$  ہیں۔ لیکن دفعہ ۱۰۶ کی رو سے

$$\int \int f(x,y) dx dy = \int \int f(x,y) dx dy \quad (۷) \quad \dots$$

جہاں  $f(x,y)$  تراش  $f(x,y)$  (۷) میں  $x$ ،  $y$  کے حدود ہیں جو بالعموم  $z$  کے متعلق ہونگے۔ اس لئے

$$\int \int f(x,y) dx dy = \int \int f(x,y) dx dy \quad (۸) \quad \dots$$

یا جیسے اسکو بالعموم لکھا جاتا ہے

$$\int \int f(x,y) dx dy = \int \int f(x,y) dx dy \quad (۹) \quad \dots$$

+ پہلا کلمہ  $\int \int f(x,y) dx dy$  سے متعلق ہے اور دوسرا  $\int \int f(x,y) dx dy$  سے۔ اس امر کے متعلق کوئی پورے طہ پر  
تحال قرار داد نہیں ہے۔

۲۷۱

اگر دونوں تکملوں کے حدود مستقل ہوں یعنی اگر طبقہ میں ایک مستطیل کی شکل کا بیویس کے اضلاع محاور لا اور ما کے تنواری میں تو حجم اس طور پر بھی بیان ہو سکیگا

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{فہ} \\ \text{لا} \end{array} \right\} \text{فہ (لا، ما) فرلا} \dots\dots\dots (۱۰)$$

اور یہ کہا جاسکتا ہے کہ

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{فہ} \\ \text{لا} \end{array} \right\} \text{فہ (لا، ما) فرلا فرما} = \left\{ \begin{array}{l} \text{فہ} \\ \text{لا} \end{array} \right\} \text{فہ (لا، ما) فرما فرلا} \dots\dots\dots (۱۱)$$

اس کی توضیح شکل ۲۳ دفعہ ۳۴ سے ہوتی ہے۔ اور صورتوں میں جب تکمیل کی ترتیب کو بدلا جائے تو مختلف تکملوں کے حدود کی توہم ضروری ہوتی ہے۔

ادھر کی تشریح ہندسی شکل میں ہے لیکن نفس مضمون کے لئے یہ ضروری نہیں۔ مثلاً ایک مستوی پتھر کی کمیت نکالنے میں جس کے کسی ایک نقطہ (لا، ما) پر کثافت معلوم ہو نیز کئی اور طبعی سوالات میں یہی اصول شامل ہوتے ہیں۔

رقبہ میں کی تکمیل کے لئے ایک اور طریقہ سودمند ہوتا ہے۔ مستوی لا مابین قطبی محدود (ر، ط) لو۔ رقبہ میں کو مستطیل بنا لیا میں ہم مرکز دائروں اور نیم قطروں کے ذریعہ تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ ایسے کسی ایک جزو کا رقبہ

رصف طہ صف رتے اگر ر دو متغی اضلاع کے نیم قطروں کا اوسط حسابی ہو۔ ضابطہ (۸) اس طرح یہ شکل اختیار کرتا ہے

$$\left[ \begin{array}{l} \text{ر} \\ \text{ر} \end{array} \right] \text{ی و ر طہ} \text{فر} \dots\dots\dots (۱۲) \quad \left[ \begin{array}{l} \text{ر} \\ \text{ر} \end{array} \right] \text{Zr dadr}$$

جہاں ی ایک دیا ہوا متاعل ہے ر اور طہ کا۔  
جواہر پر بیان ہوا اسکے بعد تہرے تکملہ

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{فہ} \\ \text{لا} \end{array} \right\} \text{فہ (لا، ما، ی) فرلا فرما فری} \dots\dots\dots (۱۳)$$

کے مفہوم کو زیادہ پختہ کرنے کی ضرورت نہیں۔ ایک محدود ملا کے حصہ میں کو محوروں کے



متواری ستوی کھینچنے سے قائم عناصر مف لا مف ما مف ی میں تقسیم کرو۔  
اگر ان عنصروں میں سے ہر ایک کے حجم کو ان میں کے کسی اختیاری طور پر منتخب کئے  
ہوئے نقطہ پر جو تفاعل فہ (لا، ما، ہی) کی قیمت ہے اس کے ساتھ  
ضرب دیا جائے تو جلد (۱۳) سے ایسے حاصل ضربوں کے مجموعہ کی انتہائی قیمت  
(بعض شرائط کے تابع) تعبیر ہوگی جبکہ ان عنصروں کے ابعاد کو لا انتہا کم کیا جائے  
یہی انتہائی قیمت تین سادہ مکملوں کے تواتر سے حاصل ہو سکتی ہے۔ مثلاً

$$\left\{ \begin{matrix} \text{فہ} \\ \text{لا} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \text{ما} \\ \text{ہی} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \text{فری} \\ \text{فرما} \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (۱۴)$$

جہاں مکمل بلحاظ ی کے حدود لا اور ب کے اندر ہے جو عام طور پر لا، ما کے  
تفاعل میں پھر مکمل بلحاظ ما کے حدود عہ، ب ما کے درمیان ہے جو بالعموم لا  
کے تفاعل میں اور اخیر میں مکمل بلحاظ لا کے ہے حدود دل، ص کے اندر۔  
اگر مکمل کے حدود سب مستقل ہوں تو مکمل کی ترتیب کے بدلنے سے یہ حدود  
نہیں بدلتے۔

مثال کے طور پر ایک مجسم کی کمیت معلوم کرنے کے سوال پر غور کرو جہاں  
کثافت لا، ما ہی کا تفاعل ہے۔

مثال ۱۔ اس فائدہ کا حجم دریافت کرو جو گھرا ہوا ہے ستوی ی = ۱، اسطوانہ  
لا + ما = ۱

اور ستوی ی = لا مس عہ کے اس حصہ کے درمیان جس کے لئے ی  
مثبت ہے۔

$$\left\{ \begin{matrix} \text{فری} \\ \text{فرما} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \text{مس} \\ \text{عہ} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \text{لا} \\ \text{فرلا} \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (۱۶)$$

$$\text{بلحاظ ما کے مکمل سے ما مل ہوتا ہے} \left[ \begin{matrix} \text{لا} \\ \text{ما} \end{matrix} \right] = \frac{\left\{ \begin{matrix} \text{لا} \\ \text{فرلا} \end{matrix} \right\}}{\left\{ \begin{matrix} \text{لا} \\ \text{فرلا} \end{matrix} \right\}} \left\{ \begin{matrix} \text{لا} \\ \text{فرلا} \end{matrix} \right\}$$

$$\text{تب } \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \, dx \, dy = \left[ \frac{1}{3} (1 - x^2 - y^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

مطلوبہ حجم اس لئے یہ ہے  $\frac{2}{3}$  و مس ص (۱۷) . . . . .

مثال ۲ - حجم جو کرہ  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  اور  $z \geq 0$  . . . . . (۱۸)

اور اسطوانہ  $x^2 + y^2 = 1$  اور  $z \geq 0$  . . . . . (۱۹)  
کے درمیان گھرا ہوا ہے اسے دریافت کرو -

(اسطوانہ کا نیم قطر کرہ کے نیم قطر سے آدھا ہے اور اس کا محور کرہ کے ایک نصف قطری علی التوا نیم نصف کرہ ہے) -

اگر مستوی  $z = 1$  میں قطبی محدود شامل کئے جائیں تو مساوات (۱۹) یہ شکل اختیار کرتی ہے

اور (۱۸) سے حاصل ہوتا ہے  $\frac{2}{3} = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$  . . . . . (۲۱)  
مطلوبہ حجم اس لئے ہے

$$\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy = \frac{2}{3} \quad \text{و حجم طہ } \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy = \frac{2}{3}$$

$$\text{ب } \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy = \left[ \frac{1}{3} (1 - x^2 - y^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{3} \quad (\text{جب } z = 1)$$

$$\text{اور } \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx \, dy = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{4}$$

بالآخر نتیجہ ہے  $\frac{2}{3} - \frac{\pi}{4}$  . . . . . (۲۳)

\*  
امثلہ ۳۶

۲۷۳

۱۔ اگر ایک منحنی ایسا ہو کہ  $\text{ما} = \text{لا}$ ، تو ثابت کر دو کہ جو سطحیں محوروں سےاور منحنی کے کسی نقطہ میں سے محدودوں کے متوازی خط کھینچنے سے بنتا ہے منحنی اسکو ایسے درجہوں میں تقسیم کرتا ہے جنکے رقبے نسبت  $\text{م} : \text{ن}$  میں ہوتے ہیں۔۲۔ محور  $\text{لا}$  اور منحنی  $\text{ما} = \text{ب جب } \frac{\text{لا}}{\text{ب}}$  کی نیم موج کی درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے وہ  $\frac{1}{2} \text{ب}$  ہے۔۳۔ زنجیر  $\text{ما} = \text{ج جہز } \frac{\text{لا}}{\text{ج}}$ ، محور  $\text{لا}$ ، اور خطوط  $\text{لا} = \text{، لا} = \text{لا}$  کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے وہ  $\text{ج جہز } \frac{\text{لا}}{\text{ج}}$  ہے۔۴۔ منحنی  $\text{لا} = \text{ما} = (\text{لا} + \text{لا})$ ، محور  $\text{لا}$  کی ساتھ مل کے  $\frac{1}{11}$  رقبہ گھیرتا ہے۔۵۔ محور  $\text{لا}$  اور منحنی  $\text{ما} = \text{فو}$  جب یہ  $\text{لا}$  کے متوازی نیم موجوں کے درمیان جو رقبے ہیں ثابت کر دو کہ وہ متوالی ہندسی سلسلہ بناتے ہیں جن کی نسبت مشترک  $\text{فو} = \frac{1}{11}$  ہے۔۶۔ محور  $\text{لا}$  اور کمانی  $\text{ج ما} = (\text{لا} - \text{لا})$  کے درمیان رقبہ  $\frac{1}{4} (\text{لا} - \text{ب})$  ہے۔۷۔ منحنیوں  $\text{ما} = ۲$ ،  $\text{لا} = ۱$ ،  $\text{ما} = ۲$ ،  $\text{لا} = ۱$  کے درمیان کا رقبہ دریافت کرو۔  $\left[ \frac{9}{4} \right]$ ۸۔ کمانیوں  $\text{ما} = ۲$ ،  $\text{لا} = ۱$ ،  $\text{ما} = ۳$ ،  $\text{لا} = ۲$  کے درمیان کا رقبہ دریافت کرو۔  $\left[ \frac{۲۵}{4} \right]$ 

\* مشق کے لئے اور مثالیں "خاص منحنیات" کے نویں باب کے ختم پر ملینگی۔

۹۔ مکانی  $ما = لا - لا + لا + ۹$  کا قطعہ جو خط مستقیم  $ما = ۳ - ۲ لا$  سے ملتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔  $\left[\frac{1}{4}\right]$

۱۰۔ سکافیون  $ما = ۴ لا + (لا + لا) + ما = ۴ ب (ب - لا)$  کے درمیان کا رقبہ  $\frac{1}{4} (ب + لا) (ب - لا)$  ہے۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ کل رقبہ (جسکیہ محدود ہو) جو محور  $لا$  اور منحنی  $ما = \frac{1}{۳} (۳ لا - لا)$  کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ عماد کی قیمت پر منحصر نہیں۔

۱۲۔ منحنی  $ما = ب$  منحنی  $\frac{لا}{۲}$  کی مثبت شاخ اسکے متقارب اور محور  $ما$  کے درمیان کا رقبہ  $۱ ب$  لوگ ۲ ہے۔ [دیکھو شکل ۲۶ صفحہ ۱۱۵]

۱۳۔ دو ناقصوں  $۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$  ،  $۱ = \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$  کا مشترک رقبہ  $۲ ب$  سن ہے۔

۱۴۔ رقبہ جو محدود ہے محوروں اور مکانی  $\left(\frac{لا}{ب}\right) + \left(\frac{ما}{ب}\right) = ۱$  کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ  $\frac{1}{4} ب$  جب  $سہ$  ہے جہاں محوروں کے درمیان کا زاویہ

$سہ$  ہے [دیکھو  $لا = ۱$  جب  $طما$  ،  $ما = ب$  جب  $طما$ ]

۱۵۔ مکانی  $۲ ج ما = لا + لا$  اور اس کے دو ماسوں کے درمیان جو مبدأ سے کھینچے جائیں رقبہ  $\frac{1}{3} ج$  ہے۔

۱۶۔ سکافیون  $ما = ۴ لا - لا$  ،  $ما = ۴ لا - لا$  کا مشترک رقبہ  $\frac{1}{4} لا$  ہے۔

۱۷۔ مکمل سے ثابت کرو کہ ناقص کا رقبہ  $۲$  عماد جب  $سہ$  جہاں عماد  $ب$  مزدوج نیم قطروں کے کسی جوڑے کے طول ہیں اور  $سہ$  ان کے درمیان زاویہ ہے۔

۱۸۔ مکمل بالخصوص کا ضابطہ [صفحہ ۸۰ (۲)] اس طرح کہا جاسکتا ہے

$$۲ ع فزو = ۶ و - ۲ و فرع$$

ہندسی طور پر رقبوں کی رقوم میں اسکی تعمیر بیان کرو۔  
 ۱۹۔ باریک پترے پر ایک منحنی (ج) بنایا گیا ہے اور پتر اپنی سطح میں  
 ثابت نقطہ کے گرد زاویہ طما میں سے گھومتا ہے۔ ثابت کرو کہ منحنی جو رقبہ عبور کرتا  
 ہے وہ ہے

۲۰۔ منحنی  $r = 2 + 3 \cos \theta$  جم طما کو مرثم کرو اور اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(11  $\pi$ )  
 ۲۱۔ منحنی  $r = 2(1 + \cos \theta)$  کے اس حصہ کا رقبہ دریافت کرو جو

مکان  $r = \frac{12}{1 + \cos \theta}$  کے باہر واقع ہوتا ہے۔  $[3\pi + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}]$   
 ۲۲۔ قطبی محدودوں میں تحویل کرنے سے ثابت کرو کہ ناقص

$r = 2 + \cos \theta$  کا رقبہ  $\frac{11}{2}$  ہے۔

۲۳۔ ایک بے وزن رسی کا طول ۱ ہے یہ ایک ثابت نقطہ سے بندھی  
 ہے اور ایک چھوٹے چھلے میں سے گذرتی ہے جو (چھلہ) ایک افقی سلاخ  
 (ج) پر پھسل سکتا ہے سلاخ و میں کی انتصابی سطح میں واقع ہے۔ رسی کا پچھلا  
 حصہ انتصابی نیچے لٹکتا ہے اور اس سرے کے ساتھ ایک چھوٹا وزن (ج) بندھا ہے۔  
 (ج) کا طریق دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اس طریق اور (ج) کے درمیان  
 رقبہ  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta$  گ۔ جتنا چلی ہے جہاں گ گہرائی ہے  
 (ج) کی نقطہ سے۔

۲۴۔ ہندسی تجلیات کی بنیاد پر ثابت کرو کہ کافی کے دو اسکی نیم قطروں اور  
 منحنی کے درمیان رقبہ اس رقبہ کا نصف ہے جو منحنی مرتب پر کے متناظر محدودوں اور  
 مرتبہ کے درمیان گھیرا ہوا ہے۔

۲۵۔ (فصل ۵۹) بناؤ کہ ایسٹر کے سطح بیامیں پھیپہ کے درجوں سے کیا ظاہر



۲۹۔ مستقل طول کا ایک خط مستقیم  $\Delta B$  اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اسکے سرے دو ثابت متقاطع خطوط مستقیم پر ہمیشہ واقع ہوتے ہیں ثابت کرو کہ اس پر کا کوئی نقطہ  $P$  ایک ناقص مرتبہ کرتا ہے جس کا رقبہ  $\Delta B \times \Delta P \times \Delta P$  ہے۔

### امثلہ ۳۰

#### جسم

- ۱۔ منحنی  $MA$  جب  $\frac{1}{2}$  کی نسیم موج کو محور  $LA$  کے گرد پھرانے سے جو حجم پیدا ہوتا ہے ثابت کرو کہ وہ حائط اسطوانہ کا نصف ہے۔
- ۲۔ ثابت کرو کہ ایک مخروط ناقص کا حجم جس کے سرے متوازی ہیں

$$\frac{1}{4} F \{ Q_1 + 4Q_2 + Q_3 \} \text{ ہے جہاں } Q_1, Q_2, Q_3 \text{ اسکے سروں}$$

- کے رقبے ہیں اور  $F$  ان کے درمیان عمودی فاصلہ ہے۔
- ۳۔ محور  $LA$  کے گرد قائم زائد  $LA$ ۔  $MA$  کی گردش سے جو جسم پیدا ہوتا ہے اس کے ایک قطعہ کا حجم جسکی اونچائی  $h$  ہو جسے  $RA$  سے ناپا جائے ایک کرہ کے حجم کے مساوی ہوگا جس کا نیم قطر  $h$  ہو۔
- ۴۔ ایک قطعہ کرہ دو متوازی سطحوں سے گھرا ہوا ہے جن کا درمیانی عمودی فاصلہ  $F$  ہے۔

ثابت کرو کہ اس کا حجم  $\frac{1}{6} \pi F^3$  اس اسطوانہ کے حجم سے جس کا ارتفاع  $F$  ہے اور جسکی عمودی تراش کا رقبہ  $\pi F^2$  سطوی سروں کے رقبوں کا اوسط حسابی ہے بقدر  $RA$  کرہ کے حجم کے زیادہ ہے جس کا قطر  $F$  ہے۔

- ۵۔ ایک نیم کرہ کا نیم قطر  $h$  ہے اس کے قاعدہ سے فاصلہ  $h$  جب  $h$  پر قاعدہ کے متوازی ایک مستوی کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ نیم کرہ کے حجم کی

تصنیف کرتا ہے۔

۶۔ نیم قطر ۱ کے ایک ٹھوس کرہ کا جو حصہ نیم قطرب (۱۲ >) کی کروی سطح کے اندر شامل ہے جس کا مرکز ٹھوس کرہ کی سطح پر واقع ہے اس حصہ کو نکال دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے غلا کا حجم نیم قطر ب کے نیم کرہ کے حجم سے بقدر  $\frac{2}{3} \pi$  کے کم ہے۔

۷۔ جو ترقبہ مکانی ج ما = (لا - ل) (لا - ب) اور محور لا کے درمیان گھرا ہوا ہے اس کو محور لا کے گرد گھمانے سے جو حجم پیدا ہوتا ہے وہ ہے۔

$$\frac{1}{3} \pi (لا - ب)^2 / ج$$

۸۔ اگر ایک قطعہ مکانی معین کے گرد گھومے تو حجم پیدا شدہ مائٹا اسطوانہ کے  $\frac{5}{8}$  کے مساوی ہوگا۔

۹۔ ایسے مجسم کا حجم جو مکانی کو رائس پر کے فاس کے گرد پھرانے سے پیدا ہوتا ہے مائٹا اسطوانہ کا  $\frac{1}{8}$  ہے۔

۱۰۔ مکانی ما = لا کا وہ حصہ جو ترخاص سے کٹتا ہے مرتب کے گرد گردش کرتا ہے ثابت کرو کہ پیدا شدہ قطعہ نامجسم کا حجم  $\frac{152}{15} \pi$  ہے۔

۱۱۔ وتر لا = ف منحنی لا ما = لا کے جو حصہ کاٹتا ہے اسے محور لا کے گرد پھرایا گیا ہے ثابت کرو کہ حجم پیدا شدہ اس اسطوانہ کے حجم کا ایک چوتھائی ہے جس کا ارتفاع ف ہے اور جو اسی قاعدہ پر قائم ہے۔

۱۲۔ مثلثی منشور کے ایسے مقطوعہ کا حجم جس کو کوئی دو بستوی قطع کریں

$$\frac{1}{3} (\pi + \pi + \pi) ق \text{ ہے جہاں } \pi, \pi, \pi$$

تین متوازی کناروں کے طول ہیں اور ان کناروں پر عمود وار تراش کا رقبہ ق ہے۔

۱۳۔ ایک پیچ کی وسطی تراش کا نیم قطرب ہے اور ہر سرے کا نیم قطر ۱ ہے۔ ثابت کرو کہ پیچ کا حجم ہے  $\frac{5}{15} (\pi + \pi + \pi + 8\pi) ف$



جہاں ف پیچے کا طول ہے۔ یہ مان لیا گیا ہے کہ پیچے کا کون نغنی مکانی کی ایک ف سے  
۱۴۔ دائرہ کی ایک قوس اپنے دتر کے گرد گردش کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ حجم کا حجم

$$\frac{2}{3} \pi r^2 \text{ راجب عما} + \frac{2}{3} \pi r^2 \text{ راجب عما} = 2 \pi r^2 \text{ راجب عما}$$

جہاں ر نیم قطر ہے اور ۲ عما قوس کی زاوی پیمائش ہے۔

۱۵۔ شکل جو نیم قطر ر کے دائرہ کے ربع اور اس کے سرول کے حماسوں سے  
گھری ہوئی ہے ان حماسوں میں سے ایک کے گرد گردش کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ  
اس طرح جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم ہے

$$\frac{2}{3} \pi r^2 \left( \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \right)$$

۱۶۔ دو مساوی نیم قطر کے قائم مستدیر اسطوانے ایک دوسرے کو علی القوائم  
قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان دونوں سے گھرا ہوا حجم ۱۷۔ ر ہے۔

اگر ان کے محور زاویہ عما پر قطع کریں تو حجم ۱۶۔ ر قائم عما ہے۔

۱۷۔ اگر قطع زائد  $\frac{2}{3} \pi r^2 - \frac{2}{3} \pi r^2 = 1$  نور لا کے گرد گھومے تو وہ حجم

جو اس سطح، متقاربوں سے تھکون شدہ مخروط اور محور کلا کے علی القوائم و مستویوں  
کے درمیان گھرجاتا ہے جہاں مستویوں کا فصل ف ہے اس مستدیر اسطوانے کے  
حجم کے مساوی ہے جس کا ارتفاع ف ہے اور نیم قطرب۔

۱۸۔ ایک قائم مستدیر مخروط کا نصف زاویہ عما ہے، اس کا راس نیم قطر  
ر کے ایک کرہ کی سطح پر ہے اور اس کا محور مرکز میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ کرہ  
کے اس حصہ کا حجم جو مخروط سے باہر ہے  $\frac{2}{3} \pi r^2$  راجب عما ہے۔

۱۹۔ المرفدہ ۱۰۹ کے سپین کے طریقہ میں جہاں دو متوازی تراشوں میں سے  
کے درمیان جو حجم شامل ہے وہ معلوم کیا گیا ہے، درمیان کی تراش میں تراشوں

میں سے بالترتیب فاصلوں  $h_1$  پر ہوتو ضابطہ ہوگا

$$\frac{5+6}{56} \{ (2-5) (ک) (ک) (س) + (5+6) (ک) (س) + (2-5) (س) + (5+6) (س) \}$$

## امثلہ ۳۸\*

### منحنی خط اور سطحیں

۱۔ جیب کے منحنی ما = ب جب لا، کی پوری موج (Undulation)

کا طول ایک ناقص کے محیط کے ساوی ہے جسکے نیم محور (ا + ب) اور دہیں۔  
۲۔ کسی منحنی میں بدآ سے اسکے کسی ماس پر جو عمود (ح) کھینچ سکتا ہے اسکے طول کے لئے یہ ضابطہ مائل کرو۔

$$ع = لا \frac{فرقا}{فرس} - ما \frac{فرقا}{فرس}$$

نیز ثابت کرو کہ سمتی نیم قطر کا ماس پر قائم منحنی ہے

$$لا \frac{فرقا}{فرس} + ما \frac{فرقا}{فرس} یا ر \frac{فرقا}{فرس}$$

۳۔ زنجیر (Catenary) ما = ج جسٹ لا کی کسی قوس کو

جو اس سے شروع ہوتی ہے، مرتب کے گرد گمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکی منحنی سطح (ج لا + ما س) ہے جہاں لا، ما، س اس قوس کے دوسرے سرے سے متعلق ہیں۔

۴۔ گردشی مکانی نما سے محور پر علی التوائم مستوی سے منحنی سطح کا جو صرکشا ہے وہ ہے

$$\frac{1}{4} \frac{ب}{ف} \{ (2-5) (ب) (ب) + (5+6) (ب) (ب) + (2-5) (ب) (ب) + (5+6) (ب) (ب) \}$$

\* صفحہ ۳۷۴ کے نیچے نوٹ دیکھو۔

جہاں محور کا طول  $\pi$  ہے اور احاطہ کرنے والے دائرہ کا نیم قطر  $\frac{\pi}{2}$  ہے۔  
 ۵۔ مکانی ما<sup>۱</sup> =  $\frac{\pi}{2}$  لا کی قوس کو جو مبدأ اور معین لا =  $\frac{\pi}{2}$  کے درمیان  
 ہے محور لا کے گرد گھمانے سے جو منحنی سطح پیدا ہوتی ہے وہ  $\frac{\pi}{2}$  لا ہے۔  
 ۶۔ مکانی کی قوس کا وہ حصہ جو رأس اور وتر خاص کے درمیان واقع ہے  
 محور کے گرد پھرایا گیا ہے، ثابت کرو کہ محکم کی منحنی سطح کا عہدہ کے رقبہ کی ۲۱۹، اگنا ہے۔  
 ۷۔ دائرہ کی قوس اپنے وتر کے گرد گھومتی ہے، ثابت کرو کہ سطح جو پیدا ہوتی ہے  
 وہ ہے  $\frac{\pi}{2}$  لا (جب عا - عا جم عا)۔ جہاں لا نیم قطر ہے اور قوس کا زاویہ  
 ثاب ۲ عا ہے۔

۲۶۹

۸۔ نیم قطر لا کے دائرہ کا ربع اپنے سرے پر کے ماس کے گرد گھومتا ہے ثابت  
 کرو کہ منحنی سطح کا رقبہ  $\frac{\pi}{2}$  (۲ -  $\frac{\pi}{2}$ ) لا ہے۔

۹۔ نیم قطر لا کا ایک ثابت کرہ ہے۔ اسکی سطح پر کے کسی نقطہ کو مرکز مان کر نیم قطر  
 لا کا ایک متغیر کرہ بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اسکی سطح کا رقبہ جو ثابت کرہ کے حامل ہونے  
 سے قلع ہوتا ہے وہ زیادہ سے زیادہ ہے جبکہ  $\frac{\pi}{2}$  لا۔  
 ۱۰۔ کرہ کا ایک ماسی مخروط کھینچا گیا ہے اور مخروط کے رأس کو مرکز مان کر دو  
 کروی سطحیں کھینچی گئی ہیں جو کرہ اور مخروط دونوں کو قطع کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ کرہ اور  
 مخروط پر جو منقطع قطع ہوتے ہیں ان کے رقبے مساوی ہیں۔

## امثلہ ۳۹

### تقریبی تربیع - اوسط قیمتیں

۱۔ لوگ ۲ کو ضابطہ لوگ ۲ =  $\frac{1}{2} \log 2$  سے حاصل کر نیکی لے

محسن کا قاعدہ لگاؤ۔ [ٹیک قیمت ہے لوگ ۲ = ۰.۳۰۱۰۳۰...]

۲۔  $\pi$  کی قیمت ضابطہ  $\frac{1}{4} \log 2 = \frac{1}{4} \log 2$  سے حاصل کرو۔

۳۔ (دفعہ ۱۱۴) تین معین والے سمن کے طریقہ میں 'درمیانی معین' 'ماہ' معینوں  
 'ماہ' سے غیر مساوی فاصلوں 'ھ' 'گ' پر ہے 'اس صورت میں ضابطہ ہے

$$\frac{1}{4} (\text{ھ} + \text{گ}) (\text{ماہ} + \text{ماہ} + \text{ماہ} + \text{ماہ}) + \frac{1}{4} (\text{ھ} - \text{گ}) (\text{ماہ} - \text{ماہ} - \text{ماہ} - \text{ماہ})$$

۴۔ قطع ناقص کے قطر مساوی زاوی وقفوں پر کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ  
 ان قطروں کے مربعوں کا اوسط 'اعظم' اور اصغر محوروں کے حاصل ضرب کے  
 مساوی ہے۔

۵۔ طول 'ا' کے خط مستقیم پر ایسے ہی کوئی نقطہ لے لیا گیا ہے، ثابت کرو کہ  
 دو حصوں کی سطح کا اوسط رقبہ  $\frac{1}{4}$  'ا' ہے اور دو حصوں کے مربعوں کے مجموعہ کی  
 اوسط قیمت  $\frac{2}{3}$  'ا' ہے۔

۶۔ اگر ایک نقطہ مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کرے تو وقت کے  
 مساوی اور لامتناہی چھوٹے وقفوں پر کی رفتاروں کا اوسط مربع

$$\frac{1}{3} (\text{و}^2 + \text{و}^2 + \text{و}^2) \text{ کے مساوی ہے جہاں } \text{و} \text{ اور } \text{و} \text{ ابتدائی}$$

اور آخری رفتاریں ہیں۔  
 ۷۔ سادہ ہوسیتی حرکت میں ثابت کرو کہ اوسط توانائی بالحرکت 'زیادہ سے  
 زیادہ توانائی' بالحرکت کا نصف ہے۔

۸۔ ایک ذرہ 'دی' ہوئی رفتار 'ا' اگر اختیاری زاویہ ارتفاع سے پھینکا گیا ہے،  
 ثابت کرو کہ اوسط افقی شیب (Range) زیادہ سے زیادہ  $\frac{1}{2} \times 2 \times 2$  ہے۔

۹۔ ناقص کے ماسکی نیم قطر مساوی زاوی وقفوں پر کھینچے گئے ہیں ثابت  
 کرو کہ ان ماسکی نیم قطروں کا اوسط 'نیم محور اصغر' کے مساوی ہے۔

۱۰۔ نیم کرہ کی تختی سطح پر کے نقطوں کا اوسط فاصلہ قاعدہ کے مستوی سے  
 نیم قطر کے نصف کے مساوی ہے۔

۱۱۔ نیم کرہ کے قطب سے کروی سطح کے نقطوں کا اوسط فاصلہ  $\frac{4}{3} \times \text{ر}$  ہے  
 جہاں کرہ کا نیم قطر 'ر' ہے۔

۱۲۔ دائری رقبہ کا نیم قطر  $\Delta$  ہے، مرکز سے 'نیز محیط پر کے کسی نقطہ سے اس رقبہ پر کے نقطوں کے فاصلوں کے شکافیوں کی اوسط قیمتیں دریافت کرو۔

$$\left[ \frac{2}{\Delta}, \frac{2}{\Delta} \right]$$

۱۳۔ ایک ڈنڈے کی شکل گردشیں لمبوترے ناقص نما کی ہے جو بہت لمبا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا اوسط تراشی رقبہ مرکز پر کی تراش کے ذنب کا دو تہائی ہے۔  
۱۴۔ برقانی ہوائی گول ٹکیا پر سطحی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے  $(\Delta - \Delta^2)^{1/2}$  جہاں ٹکیا کا نیم قطر  $\Delta$  ہے اور مرکز سے نقطہ کا فاصلہ ہے۔ اوسط کثافت کی نسبت مرکز پر کی کثافت کے ساتھ دریافت کرو۔

۱۵۔ اگر شہابیوں (Comets) کے مدار فضا میں یکساں طور پر منقسم ہوتے تو طریق الشمس کے ساتھ ان کا اوسط میلان نیم قطری  $(54.296)$  ہوتا۔

۱۶۔ نیم قطر  $\Delta$  کی کردی سطح کے نقطوں کا اوسط فاصلہ ایک ایسے نقطہ

چپ سے جو مرکز سے فاصلہ ج پر ہے ج +  $\frac{1}{3}$   $\frac{\Delta}{J}$  ہے اگر چ

کرہ کے باہر ہو اور  $\Delta + \frac{1}{3} \frac{\Delta}{J}$  ہے اگر چ کرہ کے اندر ہو۔

۱۷۔ ایک دائرہ کا نیم قطر  $\Delta$  ہے، اس کے محیط پر کے نقطوں کا اوسط فاصلہ محیط پر کے ایک ثابت نقطہ سے  $1.5242 \Delta$  ہے۔

۱۸۔ ایک دائری رقبہ کا نیم قطر  $\Delta$  ہے۔ اس پر کے نقطوں کا اوسط فاصلہ محیط پر کے ایک ثابت نقطہ سے  $1.132 \Delta$  ہے۔

۱۹۔ کرہ کے اندر کے نقطوں کا اوسط فاصلہ سطح پر کے ایک دے ہوئے نقطہ سے  $\frac{7}{8} \Delta$  ہے۔

۲۰۔ اگر زمین کے مرکز سے فاصلہ  $r$  پر کثافت اس ضابطہ  $\rho = \frac{1}{r^2}$  سے حاصل ہو جہاں  $\rho$  مستقل ہے تو ثابت کرو کہ

اوسط کثافت ہوگی ۳ ث جب ۱ م - ۱ م و جم ۱ م جہاں ۱ م و ۲ م

زمین کا نیم قطر ہے -  
۲۱ - کردی شکل کی کچھ کمیت ہے جس کی کثافت مرکز سے فاصلہ دیرث ہے، اگر نیم قطر د کے ہم مرکز گروہ کے مادہ کی اوسط کثافت ۳ م ہو تو ثابت کرو کہ

$$ث = ۱ + \frac{۱}{۳} د فرث \frac{۱}{فر}$$

## امثلہ ۲۰

### اوسط مرکز

۱ - تکمیل سے ثابت کرو کہ مخروط کا اوسط مرکز متوازی اضلاع کے وسطی نقاط کو ملانے والے خط کی اس نسبت ۱ + ۱ : ۲ ب : ۱ + ۱ سے تقسیم کرتا ہے جہاں ۱ ب متوازی اضلاع کے طول ہیں۔

۲ - معنی ما = ب جب  $\frac{۱}{۲}$  کی ایک نیم موج اور محور لا کے درمیان جو رقبہ ہے اس کا اوسط مرکز اس محور سے فاصلہ  $\frac{۱}{۲}$  ب پر ہے۔

۳ - معنی ما =  $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$  اور محور لا کے درمیان جو رقبہ ہے اس کا اوسط مرکز (۰،  $\frac{۱}{۲}$ ) ہے۔

۴ - ربع دائرہ کے سروں پر ماس کیپنے سے قوس اور ان ماسوں میں جو رقبہ گھر جاتا ہے اس کا اوسط مرکز ہر ماس سے ۰.۵۲۲۳۲ ۱ ہے جہاں دائرہ کا نیم قطر ۱ ہے۔

۵ - جو رقبہ مکانی  $(\frac{۱}{۲}) + (\frac{۱}{۲}) = ۱$  اور محددوں کے محوروں کے درمیان گھرا

ہوا ہے اس کا اوسط مرکز نقطہ  $(\frac{۱}{۵} د، \frac{۱}{۵} ب)$  پر ہے۔ رکھو لا = ۱ جب طہ ما = ب جم طہ۔

۶۔ نیم قطر  $\Delta$  کے کرہ کو ایک مستوی کے ذریعہ جو مرکز سے فاصلہ ج پر ہے، دو قطعوں میں تقسیم کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ ان قطعوں کے اوسط مرکوزوں کا فاصلہ کرہ کے مرکز سے  $\frac{2}{3} \times \frac{(ج \pm ۱)}{ج \pm ۱۲}$  ہے۔

۷۔ نیم قطر  $\Delta$  کا ربع دائرہ ہے، اسکی قوس اور سروں کے تماسوں سے جو شکل بنی ہے اسکو ایک تماس کے گرد پھرانے سے مجسم بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس مجسم کے اوسط مرکز کا فاصلہ رأس سے  $۰.۱۶۶۶$  ہے۔

۸۔ نوکدار بحراب کی شکل کا ٹیوس جیسے مکانی رقبہ  $\Delta$  پان کو چپ  $\Delta$  کے گرد پھرانے سے بنایا گیا ہے جہاں  $\Delta$  رأس سے اور پان عین سے ثابت کرو کہ اس کا اوسط مرکز محور کو نسبت  $۵:۱۱$  میں تقسیم کرتا ہے۔

۹۔ رأس سے شروع ہو کر کافی کی ایک قوس  $\Delta$  چپ سے اور پان رأس پر کے تماس پر نمودے۔ ثابت کرو کہ شکل  $\Delta$  پان کو  $\Delta$  کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کے اوسط مرکز کا فاصلہ  $\Delta$  سے  $\frac{1}{5}$  پان کے مساوی ہے۔

۱۰۔ دو مساوی سید برا سطوات ایک دوسرے کو علی القوام قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ اس حجم کا اوسط مرکز جو ان سطواتوں اور ان کے محوروں کے مستوی کے درمیان ہے اس مستوی سے  $\frac{3}{4}$  کے فاصلہ پر ہے جہاں  $\Delta$  مشترک نیم قطر ہے۔

۱۱۔ ربع دائرہ اپنے ایک ٹرے پر کے تماس کے گرد گھومتا ہے اس طرح سے جو حجم پیدا ہوتا ہے اسکی متنی سطح کا اوسط مرکز رأس سے  $۰.۸۷۶$  کے فاصلہ پر ہے۔

۱۲۔ انگڑ چھلے کو استوائی مستوی سے تراشنے سے جو دو مساوی حصے ہو جاتے ہیں ان میں سے کسی حصہ کی منحنی سطح کے اوسط مرکز کا فاصلہ اس استوائی

مستوی سے  $\frac{\pi^2}{6}$  ہے جہاں  $\Delta$  تگونی دائرہ کا نیم قطر ہے۔

۱۳۔ انگڑ چھلے کو استوائی مستوی سے تراشنے سے اس کے جو دو مساوی

حصے ہو جاتے ہیں ان میں سے کسی ایک کے محور کا اوسط مرکز استوائی مستوی سے فاصلہ  $\frac{\pi^2}{12}$

پر ہے جہاں ب ت کو بنی دائرہ کا نیم قطر ہے۔

$$۱۴ - ناقص = \frac{۱}{۱} + \frac{۲}{۱} = ۱ \text{ کو محور ما و مساوی حصوں میں تقسیم}$$

کرتا ہے کسی ایک حصہ کو محور لا کے گرد پھرانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکی  
منحنی سطح کا اوسط مرکز مرکز سے فاصلہ

$$\frac{۲}{۳} \times \frac{۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱}{۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱} \times \frac{۱}{۱} \text{ پر واقع ہے جہاں ز}$$

خروج مرکز ہے۔ یہ مان لیا گیا ہے کہ  $ب > ۱$ ۔ متناظر نتیجہ مائل کر دیکھ  
 $ب < ۱$ ۔

۱۵ - بیس کے محلے لگانے سے قائم مستدیر مخروط اور قائم مستدیر مخروط  
ناقص کا حجم اور اسکی منحنی سطح دریافت کرو۔

۱۶ - انیم قطر ۱ کے ایک اسطوانہ کے گرد ایک نالی کاٹی گئی ہے  
جس کی عمودی تراش نیم قطر ب والا ایک نصف دائرہ ہے ثابت کرو کہ حجم جو نکال دیا  
گیا ہے وہ ہے  $\pi ۱ ب^۲ - \frac{\pi ۲}{۴} ب^۲$

نیز نالی کی سطح ہے  $\pi ۱ ب - \pi ۲ ب^۲$

۱۷ - ایک مستدیر اسطوانہ کا نیم قطر م ہے اس کی سطح پر مستطیلی تراش کا

ایک بیج تاگا کاٹا گیا ہے ثابت کرو کہ تاگے کے ایک پھیر کا حجم  
 $\pi ۲ ب^۲ + \pi ۱ ب$  ہے جہاں ۱ ب مستطیل کے ضلع ہیں اور ۱  
وہ ضلع ہے جو اسطوانہ کی سطح پر عمود دار ہے۔

۱۸ - ایک بند منحنی کے محیط کے اوسط مرکز میں سے ایک خط مستقیم کھینچا گیا ہے  
اور یہ محیط کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان حصوں کو اس خط سے گرد  
گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتے ہیں ان کی منحنی سطحیں مساوی ہیں۔

۱۹ - رقبہ قطی محاور لا اور ما کے گرد گھومنے سے حجم ۶ اور ۷ بالترتیب  
پیدا کرتا ہے۔ بتاؤ کہ کیا رقبہ پیدا ہوگا اگر یہ خط

لا حجم ۷ + ۷ + ۷ = ۲۱ کے گرد گھومے۔ اس میں مان لیا جائے کہ



خط رقبے کو نہیں کاٹنا۔

## امثلہ ۴۴

### ضعفی تکملے

۱۔ تکملات  $\text{م}^{\text{م}} (\text{لا}^{\text{ا}} + \text{ما}^{\text{ا}})$  فلا فرما،  $\text{م}^{\text{م}} (\text{لا}^{\text{ا}}) - \frac{\text{لا}^{\text{ا}}}{\text{ب}^{\text{ا}}} - \frac{\text{ما}^{\text{ا}}}{\text{ب}^{\text{ا}}}$  فلا فرما

کی قیمتیں دریافت کرو جبکہ انہیں ناقص  $\frac{\text{لا}^{\text{ا}}}{\text{ب}^{\text{ا}}} + \frac{\text{ما}^{\text{ا}}}{\text{ب}^{\text{ا}}} = \text{ا}^{\text{ا}}$  کے رقبہ پر لیا جائے

۲۔ ثابت کرو کہ اسطوانوں  $\text{لا}^{\text{ا}} + \text{ما}^{\text{ا}} = ۲ \text{ لا}^{\text{ا}}$ ،  $\text{ما}^{\text{ا}} = ۲ \text{ لا}^{\text{ا}}$

کے درمیان کا حجم  $\frac{۱۲۸}{۱۸}$  ہے۔

۳۔ نیم قطر ۲ کا ایک کرو بنایا گیا ہے جبکہ اس کا مرکز نیم قطر ۱ کے اسطوانہ کی سطح پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ کی سطح کا جو حصہ کرو کے اندر ہے اس کا رقبہ ۱۶ ہے۔

۴۔ حجم جو ناقصی کافی نا  $\text{ما}^{\text{ا}} = \frac{\text{لا}^{\text{ا}}}{\text{ب}^{\text{ا}}} + \frac{\text{ما}^{\text{ا}}}{\text{ب}^{\text{ا}}}$  اسطوانہ  $\text{لا}^{\text{ا}} + \text{ما}^{\text{ا}} = ۲ \text{ لا}^{\text{ا}}$

اور ستوی  $\text{ما}^{\text{ا}} =$  کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ ہے  $\frac{\pi (\text{ب}^{\text{ا}} + \text{ق}^{\text{ا}})}{۸ \text{ ب}^{\text{ا}} \text{ ق}^{\text{ا}}}$

# نواں باب

## خاص منحنی

۱۱۹۔ جبریہ منحنی جو ایک تشاکل کا محور کہتے ہیں۔

ما = ف (لا) ..... (۱)

کے نمونہ کے جبریہ منحنیات کو مرتسم کر نیکے طریقوں کی توضیح اس کتاب کے مختلف حصوں میں کی گئی ہے جہاں ف (لا) منطق تفاعل تھا اور ان تریجی طریقوں میں متقاربوں، اعظم اقل معینوں اور نقاط انعطاف کا دریافت کرنا بھی شامل تھا۔ (دیکھو دفعات ۱۳، ۱۴، ۵۱، ۶۷)

عام طور پر جبریہ منحنیات کا مطالعہ اس کتاب کے حدود سے باہر ہے لیکن

نمونہ ف = ف (لا) ..... (۲)

کے منحنیات کی بحث میں کچھ جگہ وقف کر دینا سودمند ہوگا۔

اس مساوات سے لا کی کسی قیمت کے جواب میں ما کی دو مساوی لیکن مختلف علامت شدہ قیمتیں ملتی ہیں، اس لئے منحنی محور لا کے گرد متشاکل ہے۔ نیز چونکہ ما لازماً مثبت ہے اس لئے لا کی ان سمتوں کے اندر (اگر ایسی موجود ہوں) جن کے لئے ف (لا) منفی ہے منحنی کا کوئی حقیقی حصہ نہیں ہو سکتا۔ مثلاً اگر ف (لا) میں ایک مساویہ جزو ضربی لا۔ لا شامل ہوتا ہے اور اس لئے مساوات یہ شکل اختیار کرتی ہے

ما = ف (لا - لا) ف (لا) ..... (۳)

تو بائیں جانب کا رکن علامت بدلتا ہے جیسے لا، لا کی قیمت میں سے گزرتا ہے۔ اس لئے (لا، لا) کے ایک جانب معین خیالی ہے۔

$$\text{نیز اس نقطہ پر } \left( \frac{\text{مف لا}}{\text{مف لا}} \right)^2 = \frac{\text{ما}^2}{(\text{لا} - \text{لا})^2} = \frac{\text{فلا}}{(\text{لا} - \text{لا})}$$

اور اس لئے  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \infty$ ، اس لئے ماس ولا پر عمود وار ہے۔

اگر برعکس اسکے ف (لا) دوہرا جزو ضربی رکھتا ہو مثلاً

$$\text{ما}^2 = (\text{لا} - \text{لا})^2 \text{ فلا}^2 \dots \dots \dots (۴)$$

تو بائیں جانب کا جملہ علامت نہیں بدلتا جبکہ لا قیمت لا میں سے گزرتا ہے۔ اس لئے معین نقطہ (لا، لا) کے دونوں جانب حقیقی ہے یا دونوں جانب خیالی۔ پہلی صورت میں نقطہ زیر بحث میں سے مخنی کی دو شاخیں ہیں جو ایک زاویہ پر قطع کرتی ہیں اور ایک ”عقدہ“ بناتی ہیں۔ دوسری صورت میں (لا، لا) طریق پر اکیلا یا ”فردوج“ نقطہ ہے۔ عقدہ پر ماسی خطوط کی سمتیں سب ذیل حالت ہوتی ہیں

$$\left( \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 = \frac{\text{نسا}}{(\text{لا} - \text{لا})^2} = \frac{\text{فلا}}{(\text{لا} - \text{لا})}$$

اگر ف (لا) تھرا جزو ضربی رکھتا ہو مثلاً

$$\text{ما}^2 = (\text{لا} - \text{لا})^3 \text{ فلا}^3 \dots \dots \dots (۵)$$

تو بائیں جانب کا جملہ نقطہ (لا، لا) پر علامت بدلتا ہے۔ پس اس نقطہ کے ایک جانب مخنی خیالی ہے۔ نیز چونکہ  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  اس صورت میں صفر ہے مخنی عمود لا کو مس کرتا ہے۔

یہاں چند مثالیں دی جاتی ہیں۔ ابتدا میں ایسی صورتیں ہیں جن میں ف (لا) صحیح اور منطوق بھی ہے۔

مثال ۱- جس صورت میں ف (لا) پہلے یا دوسرے درجہ کا ہے مثلاً

$$م^2 = ل + لا + ب^2 = م^2 = ل + لا + ب^2 + ج^2 + \dots (۶)$$

تو منحنی ایک مخروطی ہے جس کا محور لا صدری محور ہے۔

مثال ۲- کبھی غنیمات

$$م^2 = ل + لا + ب^2 + ج^2 + د^2 + \dots (۷)$$

میں بعض دلچسپ صورتیں شامل ہوتی ہیں۔

(۱) اگر بائیں جانب کے قطعی اجزائے ضربی حقیقی اور الگ الگ ہوں تو اس مساوات کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$م^2 = (لا - عا)(لا - ببا)(لا - جما) \dots (۸)$$

اور یہ فرض کر لینے سے عموماً کم نہیں ہو جاتی کہ مثبت ہے اور عا > ببا > جما

لا > عا کے لئے اور ببا > لا > جما کے لئے معین خیالی ہیں۔ (عا - ببا)

اور (ببا - عا) کے درمیان م^2 کی اعظم قیمت ہے۔ اس لئے منحنی ایک بند طبقہ اور ایک

لا انتہا شاخ پر مشتمل ہے۔ لا کی بڑی قیمتوں کے لئے

$$\frac{م^2}{لا} = \frac{لا}{لا} (1 - \frac{عا}{لا}) (1 - \frac{ببا}{لا}) (1 - \frac{جما}{لا})$$

یعنی منحنی لا کے محور پر تقریباً عمود وار ہوتے جائے گا میلان رکھتا ہے۔

(ب) اگر (۷) کے بائیں طرف کا جملہ صرف ایک حقیقی جزو ضربی رکھتا ہو تو مساوات

کو یوں لکھا جاسکتا ہے

$$م^2 = (لا - عا)(لا + ب + ق) \dots (۹)$$

جہاں پ > م ق۔ اس صورت میں منحنی محور لا سے صرف ایک دفعہ

لمتا ہے۔

(ج) شکل (۸) سے شکل (۹) میں گذر دو طرح سے عمل میں آتا ہوا خیال کیا جاسکتا ہے

۳۸۶

ایک نقطہ نظر یہ ہے کہ عا، ببا، جما میں سے بڑی دو قیمتوں کے مل جانے سے

یہ خاص صورت پیدا ہو یعنی

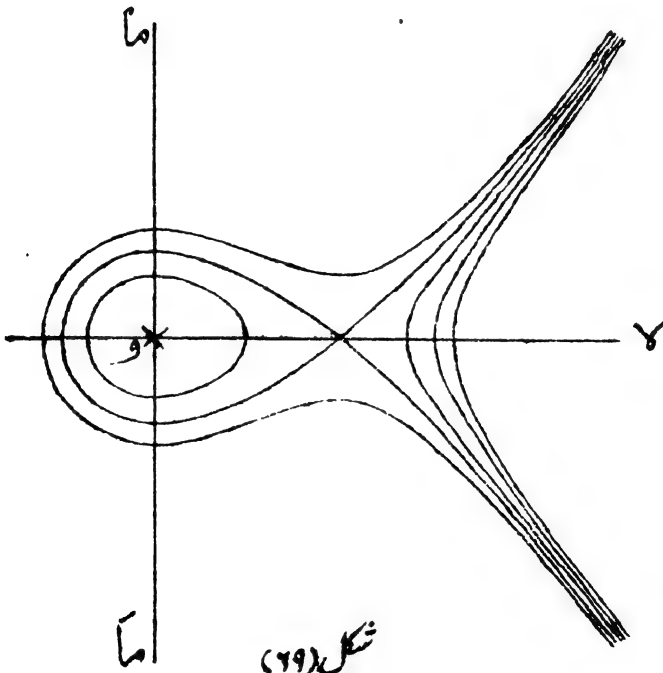
$$م^2 = (لا - عا)(لا - ببا) \dots (۱۰)$$

یہاں  $\Delta > 0$  کے لئے مآ خیالی ہے اور  $\Delta < 0$  کے لئے حقیقی ہے لیکن  $\Delta = 0$  بہا کے لئے یہ صفر ہوتا ہے۔ نقطہ (بہا،) یہاں عقدہ ہے۔ اسے یوں خیال کیا جاسکتا ہے کہ پہلی صورت کے حلقہ اور لامتناہی شاخ کے ملنے سے یہ پیدا ہوا ہے۔

(۵) اگر  $\Delta$  بہا، جہا میں سے دو چھوٹی مثبتیں مل جائیں تو

$$\Delta = \Delta^2 (\Delta - \Delta) \dots \dots \dots (11)$$

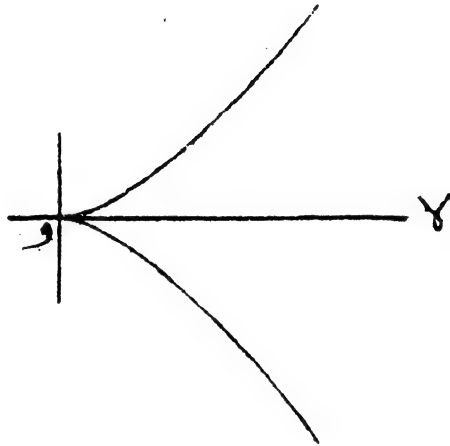
$\Delta > 0$  جہا کے لئے مآ خیالی ہو گا سوائے  $\Delta = 0$  کے جبکہ یہ صفر ہو گا اس صورت میں نقطہ (عہا،) اکیلا نقطہ ہے۔ ایسا خیال کیا جاسکتا ہے کہ صورت اول کے حلقہ کے معدوم ہو جانے سے یہ شکل پیدا ہوتی ہے۔



ان تمام صورتوں کی شکل (۶۹) میں تو ضیع کی گئی ہے۔ دائیں جانب سے شروع ہو کر نمونہ (۹) کا ایک منحنی ملتا ہے جو ایک ایسی لامتناہی شاخ پر مشتمل ہے۔

۲۸۷

اسکے بعد وہ صورت جس میں لانتناہی شاخ ہے اور اسکے ساتھ اکیلا نقطہ (۱۰) دکھا ہوا ہے، اس کی مساوات نمونہ (۱۱) کی ہے۔ اس ترتیب میں اگلی صورت یہ ہے لانتناہی شاخ اور نقطہ کے گرد بیضوی حلقہ، یعنی نمونہ (۹) کی مساوات ہے۔ اس سے بعد کی منسلک میں بیضوی حلقہ اور لانتناہی شاخ مل گئے ہیں اور ملنے سے عقدہ مع ایک حلقہ کے پیدا کرتے ہیں، مماثل نمونہ کی مساوات (۱۰) ہے۔ آخر میں ایک اکیلی شاخ ہے جو حلقہ کے باہر سے گزرتی ہے اس کے لئے پھر نمونہ (۹) کی مساوات ہے۔



نقطہ (۷)

\* شکل کے منحنی مساوات

$$f(x) = \frac{1}{x} (x^2 - 2x + 1) (x^2 + 2x + 1)$$

سے ترسم کئے گئے ہیں، جبکہ  $x = 2$ ،  $y = 1$ ،  $z = 1$ ۔ ان کا باہمی ربط آسانی سے ذہن میں آسکتا ہے اگر انہیں ایک سطح (دفعہ ۳۴) کے متواتر گھیر خطوط خیال کیا جائے مثلاً یہ سطح پہاڑی دامن میں کسی چوٹی کے قریب دوار کی منحنی سطح ہو سکتی ہے۔

©

Contour lines

(ع) نہایت ہی خاص صورت میں جبکہ تینوں مقداریں عدا، جما، جہا

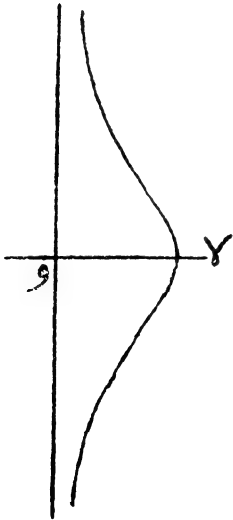
منطبق ہو جائیں تو

لر ما<sup>۲</sup> = (لا - عدا)<sup>۲</sup> ..... (۱۳)  
 اس صورت میں منحنی "نیم کبی مکافی" کہلاتا ہے۔ اسکے (عدا) پر ایک قرن ہے۔  
 اسے عقدہ کی انتہائی شکل خیال کیا جاسکتا ہے جو حلقہ کے معدوم ہو جانے سے پیدا  
 ہو سکتی ہے۔ دیکھو شکل ۱۰۔ جہاں عدا = ۰۔

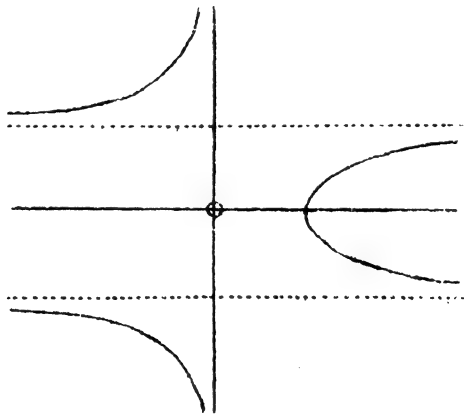
اگر مساوات (۲) میں ف (لا) منطبق ہو مگر صمیم نہ ہو تو نسب نما کی حقیقی اصلوں  
 سے (اگر کوئی ہوں) متقارب ملیں گے جو محور صا کے متوازی ہونگے بشرطیکہ لا کی  
 ایسی قیمتوں کے لئے جو ان اصلوں سے بہت کم تفاوت ہوں ما مثبت ہو۔

مثال ۳۔  $\frac{ما}{لا} = \frac{لا - ۱}{لا}$  ..... (۱۳)

معموماً متقارب ہے، نیز لا کی بڑی قیمتوں کے لئے ما = ± لا تقریباً لا = ۰۔  
 اور لا = ۱ کے درمیان منحنی کا کوئی حصہ حقیقی نہیں۔ دیکھو شکل ۱۱۔



شکل (۱۲)



شکل (۱۱)

مثال ۴ -  $\frac{a^2}{a} = \frac{a}{a} \dots \dots \dots (14)$

لا منفی کے لئے اور لا < ا کے لئے ما خیال ہے۔ دیکھو شکل ۷۲۔  
اس منحنی کو اگنیسی کی ڈائن (Witch of Agnesi) کہتے ہیں۔

مثال ۵ -  $a^2 = \frac{a + b}{b} \dots \dots \dots (15)$

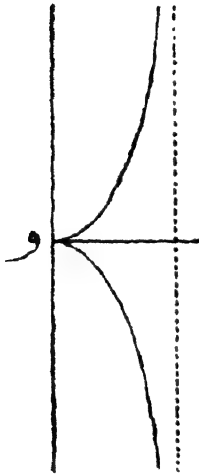
مبدأ پر عقدہ ہے اور منحنی محور کا کو دوبارہ (-، ا) پر کاٹتا ہے۔ اگر  
لا < ب یا لا > ا تو ما خیالی ہوتا ہے۔ خط لا = ب  
تقارب ہے۔ دیکھو شکل ۷۳۔

مثال ۶ -  $a^2 = \frac{a^2}{b} \dots \dots \dots (16)$

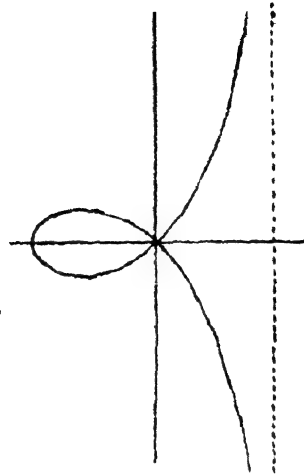
یہ مساوات (۱۵) میں ا کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔  
حلقہ اس صورت میں قرن ہو جاتا ہے شکل ۷۴۔ اس کو بسلابی خط  
(Cissoid) کہا جائے گا۔

{ اشکال ۷۳ و ۷۴  
 اگلے صفحو  
 پر  
 ہیں -

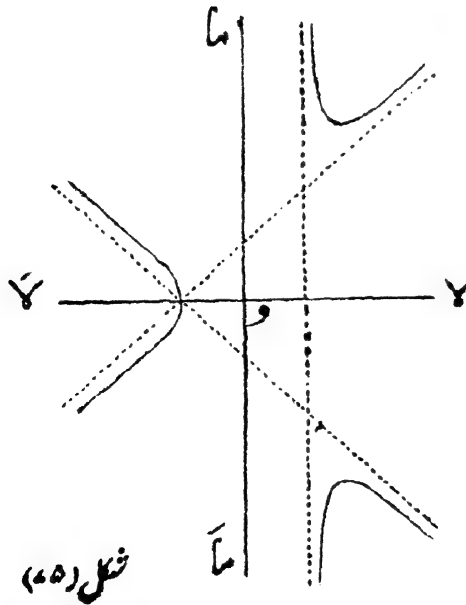




شکل (۴۳)



شکل (۴۴)



شکل (۴۵)

۲۹۰۔ مثال ۷۔  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$  ..... (۱۷)

چونکہ ما خیالی ہے جبکہ  $\frac{1}{2} < 1$ ۔ سو اسے اس صورت کے جبکہ  $\frac{1}{2} = 1$ ۔ مبداء اکیلا نقطہ ہے۔ مال متقارب دریافت کر نیکی لے

$$\frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \pm = \left( \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} - 1} \right) \pm = \frac{1}{2}$$

(۱۸) .....  $\left( \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 \right) \pm =$

اس لئے نقطہ  $\frac{1}{2} = 1$ ۔ (۱۹) .....  $(1 + 1) \pm =$  متقارب ہیں۔ شکل ۷۔

۱۲۰۔ ماورائی منحنی - زنجیرہ - خط بکتری (Tractrix)

اب چند مشہور منحنیات پر بحث کی جائے گی جو اکثر ماورائی ہیں اور جن کی تعریف اس نمونہ کی مساواتوں سے کی جاتی ہے جن کا حوالہ دفعہ ۶۱ میں دیا گیا ہے یعنی  $\frac{1}{2} = 1$  (فما) (ت) =  $\frac{1}{2}$  (خما) (ت)

جہاں ت بدلنے والا متبدل ہے۔ جو شکل ایک یکساں زنجیرہ جاذبہ ارض کے ماتحت آزادانہ طور پر لٹکنے سے اختیار کرتی ہے اسے ہم زنجیرہ (Catenary) کہیں گے۔

سکونیات کے ابتدائی اصولوں کی مدد سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر سب سے نیچے نقطہ (۱) سے شروع ہو کر زنجیرہ پر کے کسی نقطہ (۲) تک کا قوسی طول ہی ہو اور پ پر کے ناس کا افق کے ساتھ میلان مسا ہو تو

س =  $\frac{1}{2}$  سسا ..... (۲)

جہاں  $\frac{1}{2}$  مستقل ہے۔ اس لئے اگر  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{2}$  افقی اور اتصالی محدود ہوں تو

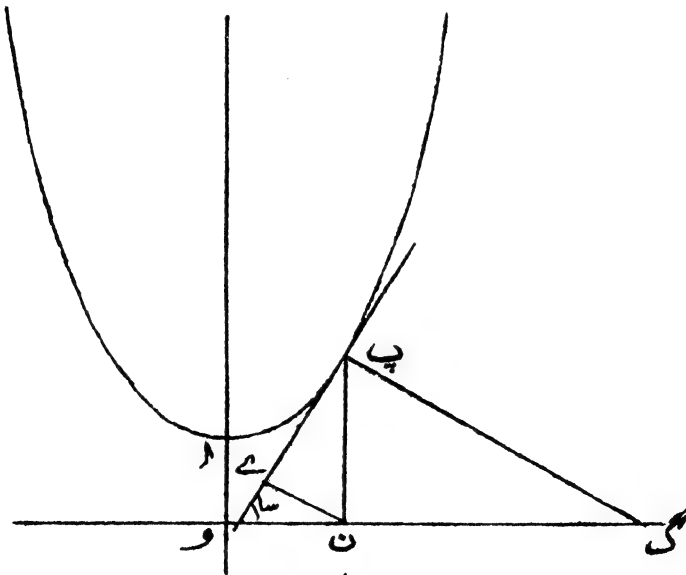
$$\left[ \begin{aligned} \frac{فرسا}{فرسا} &= \frac{فرسا}{فرسا} \times \frac{فرسا}{فرسا} = \text{جم سا} \times \text{وقط سا} = \text{وقط سا} \\ \frac{فرسا}{فرسا} &= \frac{فرسا}{فرسا} \times \frac{فرسا}{فرسا} = \text{جب سا} \times \text{وقط سا} = \text{اس سا قط سا} \end{aligned} \right.$$

(۳) .....

(۴) تکمل کرنے سے  $\Delta = \text{لوکس} \left( \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۲} \right) \text{ سا} = \text{وقط سا} \dots$ 

مستقل حذف کر دینے سے یہ مراد ہے کہ مبدأ کو کسی خاص نقطہ پر لیا گیا ہے جس کا اثبات تعین نہیں کیا گیا تھا۔ چونکہ ضابطہ (۴) سے  $\Delta = ۰$  اور  $\text{سا} = \Delta$  جبکہ  $\text{سا} = ۰$  اس لئے ظاہر ہے کہ مبدأ نقطہ  $\Delta$  کے انتصاف یا نیچے فاصلہ اوپر واقع ہے۔ (۴) سے کارٹیزی مساوات باسانی حاصل ہو سکتی ہے۔

۲۹۱



شکل (۶)

$$\frac{لا}{ر} = \text{لوگ سس} \left( \frac{سا}{ر} + \frac{۲}{۳} \right) = \text{لوگ} (\text{قط سا} + \text{سس سا})$$

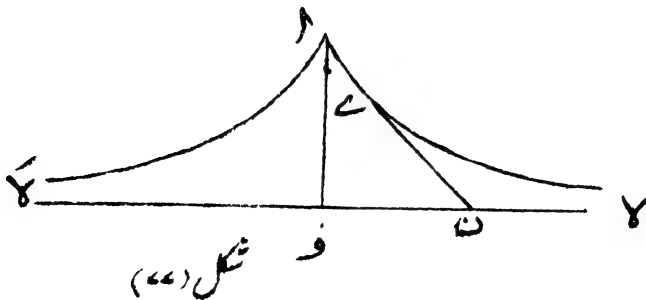
$$\text{جس سے } \left\{ \begin{array}{l} \text{قط سا} + \text{سس سا} = \text{فو} \frac{لا}{ر} \\ \text{قط سا} - \text{سس سا} = \text{فو} \frac{لا}{ر} \end{array} \right. \dots \dots \dots (۵)$$

اس لئے جمع اور تفریق سے

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ما} = \text{قط سا} = \frac{۱}{۲} (\text{فو} \frac{لا}{ر} + \text{فو} \frac{لا}{ر}) = \text{راجن} \frac{لا}{ر} \\ \text{سس} = \text{سس سا} = \frac{۱}{۲} (\text{فو} \frac{لا}{ر} - \text{فو} \frac{لا}{ر}) = \text{راجن} \frac{لا}{ر} \end{array} \right. \dots \dots (۶)$$

بعض اور خاصیتیں شکل سے باسانی حاصل ہوتی ہیں۔ اگر پان میں ہو

پان میں ماس، پانگ عماد اور ن سے پایہ سے ماس پر عین تو  
ن سے = ما جم سا = ا پ اے = ا س س سا = س  
چونکہ پان سے زنجیروں کو س کے مساوی ہے اس لئے یہ ظاہر ہے کہ  
سے کا اگلا متصل مقام سے ن کے اندر ہے دوسرے الفاظ میں سے ن  
سے کے طریق کا ماس ہے۔ اس لئے اس طریق یا منحنی کی خصوصیت یہ ہے کہ  
اس کا ماس سے ن منتقل ہوتا ہے۔ اس منحنی کو خط جستی کہتے ہیں۔  
(اور وہ اس لئے کہ یہ ایک ذری ذرہ کا راستہ یا کوئس ہے جسکو ہر کے ذریعہ ایک کھدور سے  
افقی ستوی پر کھینچا جائے جبکہ اسی کا دوسرا سران ایک خط مستقیم (ولا) منقسم کرے۔



نمونی کے نقطہ ۱ پر ایک قرن ہے اور محور ۱۱ اس کا شعاع ہے۔  
 اس نمونی کی اور خاصیتیں اس کے تماس کے (طول میں) مستقل ہونے کی  
 بنا پر حاصل ہو سکتی ہیں۔ مثلاً چونکہ اس کے دو متصل تماس ایک دوسرے کے ساتھ  
 زاویہ صاف مسا بناتے ہیں اس لئے تماس جو رقبہ عبور کرتا ہے وہ اس تکملہ  
 $\frac{1}{2}$  ڈیگری سے حاصل ہوتا ہے جبکہ اسے مناسب حدود کے درمیان  
 لیا جائے۔ اس طرح نمونی اور شعاع کے درمیان کا کل رقبہ  $\frac{1}{2}$  ڈیگری کے  
 مساوی ہے۔

۱۲۱۔ لیسازو کے نمونی (Lissajous' Curves)۔ یہ نمونی

علم آواز میں خاص اہمیت رکھتے ہیں اور دو سادہ موسیقی حرکتوں کے ترکیب  
 دینے سے جو علی القواہم سمتوں میں ہوں یہ نمونی پیدا ہوتے ہیں۔ انہیں اس طرح  
 تعبیر کیا جاسکتا ہے

(۱)  $\text{اجم (ن ت + سہ)} = \text{ما} = \text{ب جم (ن ت + صہ)}$   
 نیز یہ ظاہر ہے کہ مقداروں صہ، صہ میں سے ایک کو کوئی مناسب  
 قیمت دیدی جاسکتی ہے کیونکہ اس کے معنی یہ ہیں کہ وقت کے مبداء کا خاص انتخاب  
 کیا گیا ہے۔

جس صورت میں دور  $\frac{11}{2}$ ،  $\frac{11}{2}$  متوافق ہوں تو ت کے انقطاع سے  
 ۱۸ ما میں جبرہ رباط مل سکتا ہے۔

مثال ۱۔ جس صورت میں  $\text{ن} = \text{ن}$  تو ہم لکھ سکتے ہیں

(۲)  $\text{اجم (ن ت + صہ)} = \text{ما} = \text{ب جم ن ت} \dots \dots \dots$

جس سے  $\frac{11}{2} - \frac{11}{2} = \text{ب جم صہ} = \text{ج ب ن ت جب صہ}$

$\frac{11}{2} = \text{ج ب صہ} = \text{جم ن ت جب صہ}$

مربع اٹھانے اور جمع کرنے سے ملتا ہے

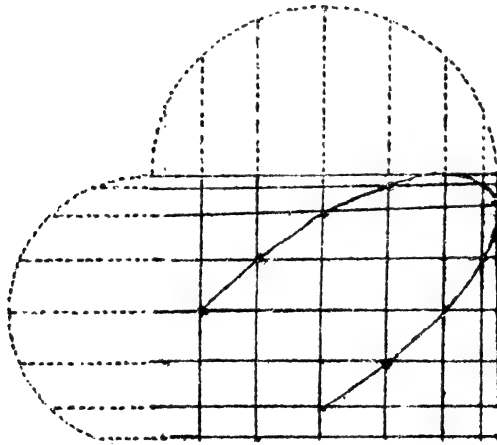
$$\frac{لا^2}{ا} - \frac{لا^2}{اب} + \frac{جم صہ}{ب} = \frac{ما^2}{ب} \quad \text{جب صہ} \dots\dots\dots (۳)$$

۲۹۳ یہ قطع ناقص ہے۔ خاص صورت میں جبکہ صہ = ۰ یا صہ = ۳ قطع ناقص بگاڑ کر ایک خط مستقیم

$$\frac{لا}{ا} \pm \frac{ما}{ب} = ۰ \quad \dots\dots\dots (۴)$$

بن جاتا ہے۔

اگر دو ٹھیک طور پر مساوی نہ ہوں تو شکل مرتبہ کو قطع ناقص خیال کیا جاسکتا ہے جو دو ترکیبی حرکتوں کی اضافی اسپیٹ صہ کے مسلسل بدلنے سے بتدریج اپنی شکل بدلتا ہے۔



شکل (۷۸)

جب قطع ناقص (۲) کو اسکے صدی محوروں کی طرف منسوب کیا جاتا ہے تو متحرک نقطہ کے محدود شکل اختیار کرتے ہیں

لا = (ن ت + صہ) ، ما = ب جب (ن ت + صہ) .... (۵)  
 ن ت + صہ کی تطبیق ہم خروج مرکز زاویہ کے ساتھ کرتے ہیں اور چونکہ ن ت + صہ  
 وقت کے ساتھ یکساں طور پر بڑھتا ہے یہ ظاہر ہے کہ نقطہ (لا، ما) ایک ایسے نقطہ کے  
 قائم ظل کی طرح حرکت کرتا ہے جو نیم قطر کا دائرہ مستقل رفتار ن کے ساتھ متحرک  
 کرے۔ چونکہ دائرہ سے ناقص میں بدلنے کے لئے کوئی لامتناہی چھوٹا وراثی نسبت سے  
 بدلنا ہے جس نسبت سے کہ متوازی نیم قطر اسطے معلوم ہوتا ہے کہ ناقصی حرکت میں کسی  
 نقطہ پیر کی رفتار ن x ج ج ہوگی جہاں ج ج ، ج پ کا مزدون نیم  
 قطر ہے اور ج ج مرکز ہے۔

اس کو "ناقصی سویتی" کہتے ہیں۔

مثال ۲۔ اگر ن = ۲ تو لکھو

لا = (ن ت + صہ) ، ما = ب جب (۲ ن ت + صہ) ..... (۶)

اس صورت میں ما اپنے دور میں سے دگنی تیز رفتار سے گزرتا ہے اور نقطہ

(۱۔ ب جب صہ) دومربعہ جہاں ہوتا ہے جیسے ن ت بعد ۲ کے بڑھتا ہے۔

اسطے منحنی بالعموم دو مقلوں پر مشتمل ہوتا ہے۔

جبکہ صہ =  $\pm \frac{1}{2}$  تو منحنی دونوں محوروں کے لحاظ سے متشاکل ہوتا ہے (دیرجہ)

مسافات یہ ہوتی ہے

$$\frac{ما}{ب} = \frac{لا}{ب} (1 - \frac{لا}{ب}) \dots \dots \dots (۷)$$

جب صہ = ۱ یا ۱ تو منحنی یک مرکز کافی کی ایک قوس بن جاتا ہے

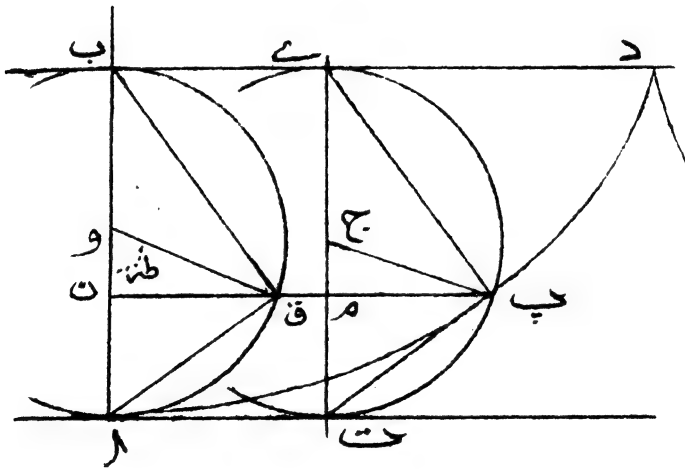
$$\frac{ما}{ب} = \pm (2 - \frac{لا}{ب}) (1 - \frac{لا}{ب}) \dots \dots \dots (۸)$$

جب دوروں کا باہمی ربط بالکل ٹھیک نہیں ہوتا تو منحنی ان دو کافی قوسوں کے  
 درمیان بطور اتھالی شکل کے ابھرتا کرتا ہے۔

مثلاً ۱۔ میں لیسارڈ کے منحنی بنانے کے طریقہ کی نشان دہی کی گئی ہے۔ اس میں اعتدالی اور افقی خطوط  
 میں جو مختلف مساوی دائروں کے مساوی افضل نقطوں میں سے کیچے گئے ہیں اور ان سے وقت کے  
 مساوی وقفے تعمیر ہوئے ہیں۔

ان منحنیات کو کھینچنے کی کئی مناظری اور جلی ترکیبیں ہیں ان کے بیان اور انکے مختلف نمونوں کے  
 متعلق تجربی علم و ادراک کی کتابوں کی طرط رجون کیا جائے۔

۱۲۲- خط تدویر - خط تدویر وہ منحنی ہے جو ایک دائرہ کے محیط پر کا کوئی نقطہ منقسم کرتا ہے جبکہ دائرہ ایک ثابت خط مستقیم پر لڑگتا ہو۔ ظاہر ہے کہ یہ منحنی بیشمار حصوں پر مشتمل ہوگا جو ایک دوسرے کے بالکل متماثل ہونگے اور جن میں سے ہر ایک حصہ دائرہ کے ایک پورے دور کو تعبیر کریگا۔ شکل ذیل میں ۱ جیسے نقطے جہاں منحنی ثابت خط مستقیم یا قاعدہ ب د سے دور سے دور ہے راس کہلاتے ہیں، متواتر راسوں کے درمیان کے نقاط جیسے د جہاں منحنی قاعدہ سے ملتا ہے ”قرن“ (Cusp) کہلاتے ہیں، خط ۱ ب کو جو ایک راس میں سے گزرتا ہے اور قاعدہ پر عمود وار ہے منحنی کا محور کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ یہ خط اشکال کا محور ہے۔



شکل (۹۹)

محور ۱ ب کو قطران کر جو دائرہ بنایا جائے اسکو حوالہ کا دائرہ ماننا مناسب ہوگا۔  
۲۹۵ فرض کرو کہ لڑگنے والے دائرہ کا کوئی اور مقام سے پ ت ہے  
قاعدہ کے ساتھ نقطہ تماس سے ہے مرکز ج ہے، میں سے گزرنیوالے



قطر کا مقابل کا سرایت ہے اور مرسم نقطہ کا مقام پ ہے۔ پ مر  
کو قاعدہ کے متوازی کہیں جو کہ یہ ت سے سے مر پر ا ب سے ن پر اور  
حوالہ کے دائرہ سے ق پر ملے۔ اگر ا رت اور ا ب کو بالترتیب لا  
اور ما کے محور مانا جائے تو پ کے محدد ہونگے

لا = ن پ = پ ب = م پ، ما = ل ن = ج ت - ج م  
فرض کرو کہ لڑ کئے والے دائرہ کا نیم قطر ا ہے اور ط م وہ زاویہ  
(پ ج ت) ہے جس میں سے یہ دائرہ گھومتا ہے جیسے مرسم نقطہ (سے  
پ تک سفر کرتا ہے۔ اس طرح ب م = ا ط م، پ م  
= ا جب ط م، ج م = ا جم ط م اس لئے

لا = ا (ط م + جب ط م) ، ما = ا (ا - جم ط م) ..... (۱)  
ان مساواتوں سے مخفی کے تمام خواص حاصل ہوتے ہیں۔  
اگر ماس کا میلان ا رت کے ساتھ یا عماد کا ب ا کے ساتھ سا ہو

$$\text{تو مس سا} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\frac{\text{فرما}}{\text{فرط م}}}{\frac{\text{جب ط م}}{\text{ا + جم ط م}}} = \frac{\text{مس}}{\frac{۲}{۲}}$$

$$\text{جس سے سا} = \frac{\text{ط م}}{۲} \dots \dots \dots (۲)$$

چونکہ زاویہ ت سے پ نصف ہے زاویہ ج ت پ کا اسلئے  
مے پ مخفی کے نقطہ پ پر عماد ہے اور پ ت ماس - مقابلہ کرو  
دفعہ ۶۴۶ کے ساتھ نیچے۔

مخفی کی قوس (مٹ) معلوم کرنے کے لئے

$$\left( \frac{\text{فرلا}}{\text{فرط م}} \right) + \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فرط م}} \right) = \text{ا} = \left[ \text{ا + جم ط م} \right] + \left[ \text{جب ط م} \right] = \text{ا + جم ط م} = \frac{۲}{۲}$$

$$\text{اس لئے دفعہ ۱۱۱ کی مدد سے مس} = \frac{\text{ا + جم ط م}}{۲} = \frac{\text{ط م}}{۲} = \frac{\text{ا جب ط م}}{۲}$$

یا سا کی رقوم میں  $س = ۳$  جب سا ..... (۳)  
کوئی مستقل جمع کرنے کی ضرورت نہیں اگر س کا مبدأ ۱ پر لیا جائے۔  
علم حرکت میں یہ رشتہ ضروری ہے۔

چونکہ  $ت پ = ت$  جب سا اس لئے

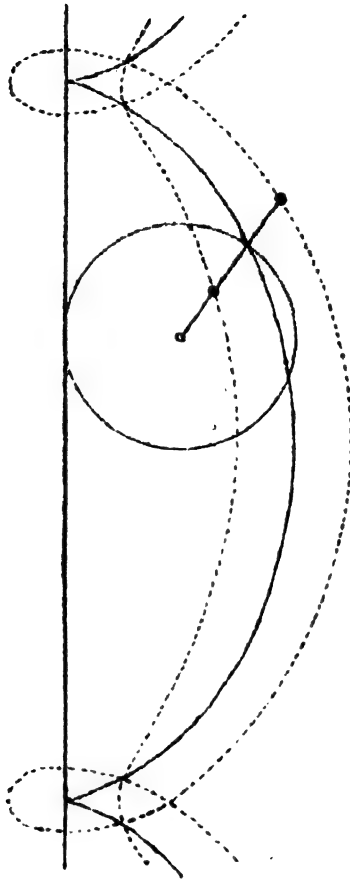
قوس  $ا پ = ۲$   $ت پ = ۲$  و ترا ق ..... (۴)  
بالخصوص ایک قرن سے دوسرے قرن تک قوس کا طول ۱۸ ہے۔  
اگر رکھا جائے  $ما = ۵$   $م = ۱$   $(۱ + جم ط)$  ..... (۵)  
تو منحنی اور قاعدہ کے درمیان رقبہ

$$= \int_0^1 (۱ + جم ط) فرط ط = ۴ \int_0^1 جم ط فرط ط$$

$$= ۸ \int_0^1 جم سا فرسا$$

۲۹۶ اس تکملہ کو عدد  $\frac{۲}{۳}$  کے درمیان لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ رقبہ  
جو قاعدہ اور منحنی کے ایک محراب کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ کون دائرہ  
کے رقبہ کا تین گنا ہے۔

اگر ایک دائرہ ایک خط مستقیم پر لڑ کے تو کوئی نقطہ جو بلحاظ دائرہ  
کے ثابت ہو اثناء حرکت میں ایک منحنی طے کرے گا جسے ہم استدار  
خط یا محض استداری (Trochoid) کہینگے۔



شکل (۸۰)

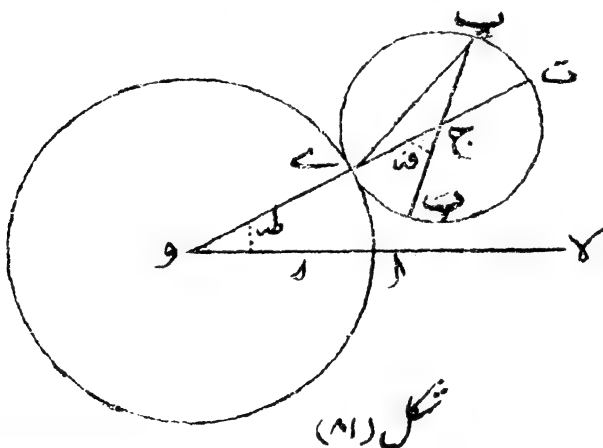
شکل ۹ میں اگر مرکز نقطہ نیم قطر ج پ کے اندر مرکز سے فاصلہ ک پر ہو تو اس کے محدود ہو جائے

$$۱) = ۱ ط + ۱ گ جب ط = ۱ ما = ۱ گ جم ط = ..... (۶)$$

جب 'گ' < ۱ تو حلقہ پیدا ہوتے ہیں جو (گ = ۱) کی خاص صورت میں بیکر کر قرن ہو جاتے ہیں۔ جب 'گ' > ۱ تو معنی قاعدہ سے نہیں ملتا۔

شکل ۸۰ میں صورتیں گ =  $\frac{1}{4}$  اکی =  $\frac{1}{2}$  ک =  $\frac{3}{4}$  ل دکھائی گئی ہیں۔  
 (۶) سے یہ آسانی ثابت ہوتا ہے کہ استدار کے کسی نقطہ پر کچا غا دڑ گئے  
 والے دائرہ کے نقطہ تماس کے متناظر غل میں سے گزرتا ہے۔ مقابلہ کرو دو فو ۴۶ کے ساتھ۔  
 ۱۲۳۔ برتدویر اور درتدویر۔ ایک ثابت دائرہ پر ایک دائرہ لگتا ہے  
 موخر الذکر کے محیط پر کا کوئی نقطہ اٹھائے حرکت میں ہو طریقہ رسم کرتا ہے اسے ہم  
 برتدویر (Epicycloid) کہتے ہیں اگر تحریک دائرہ ثابت دائرہ کے باہر واقع ہو اور  
 درتدویر (Hypocycloid) کہتے ہیں اگر یہ اندر واقع ہو\*۔ جن برتدویروں میں  
 لڑنے والے دائرہ ثابت دائرہ کے پورا گرد آجاتا ہے انہیں استدار کی خاص طر گمیر  
 تدویر (Pericycloid) کہا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ ثابت دائرہ کا مرکز ف ہے اور لڑنے والے دائرہ کا مرکز کسی مقام میں  
 ج ہے نقطہ تماس سے ہے اور مرکز نقطہ پ ہے۔ نیز فرض کرو کہ خط ج پ ج پ  
 کا دوسرا سرچ اپ ابتدائیں نقطہ ڈ پر تھا۔ ہم جاری صورت وہ لیتے ہیں جس میں لڑنے  
 والا دائرہ ثابت دائرہ کے باہر ہے۔ فرض کرو کہ  
 ول = ڈ ج پ = ب ڈ = ط = ڈ ج پ = ص



شکل (۸۱)

ج ب کا میلان و ا کے ساتھ طہ + فہ ہے اگر د کو محوروں کا مبدأ اور و ا کو محور لا مانا جائے تو قائم ظل سے ب کے محد حاصل ہوتے ہیں

$$\begin{cases} \text{لا} = (ب + ۱) \text{ جم طہ} + ب \text{ جم (طہ + فہ)} \\ \text{ما} = (ب + ۱) \text{ جب طہ} + ب \text{ جب (طہ + فہ)} \end{cases} \dots (۱)$$

یا چونکہ ۱ طہ = قوس اے = قوس پے سے = ب فہ ..... (۲)

$$\begin{cases} \text{لا} = (ب + ۱) \text{ جم طہ} + ب \text{ جم } \frac{ب + ۱}{ب} \text{ طہ} \\ \text{ما} = (ب + ۱) \text{ جب طہ} + ب \text{ جب } \frac{ب + ۱}{ب} \text{ طہ} \end{cases} \dots (۳)$$

نقطہ پ کے بر تدویر کو قسم کرتا ہے وہ دوسری رقبوں کے سر و ن میں ب کی علامت بدلنے سے حاصل ہوتا ہے یعنی

$$\begin{cases} \text{لا} = (ب + ۱) \text{ جم طہ} - ب \text{ جم } \frac{ب + ۱}{ب} \text{ طہ} \\ \text{ما} = (ب + ۱) \text{ جب طہ} - ب \text{ جب } \frac{ب + ۱}{ب} \text{ طہ} \end{cases} \dots (۴)$$

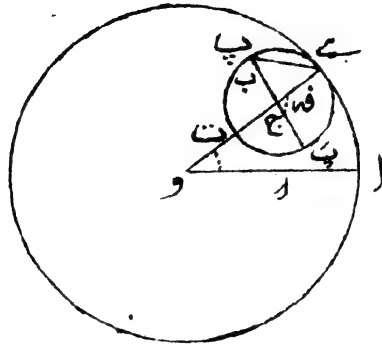
نقطہ ا پر اس کا ایک قرن ہے۔

اوپر کی مستند صورت میں دائرے اے پر کے ماس کے مقابل جانبوں میں واقع ہوتے ہیں۔ اگر یہ ایک ہی طرف واقع ہوں جیسا کہ گرد تدویر اور در تدویر کی صورت میں تو فقط ب کی علامت کو تمام ضابطہ میں بدل دینا چاہئے۔ اس طرح (۲) کے مائل ضابطہ بنتا ہے

$$\begin{cases} \text{لا} = (ب - ۱) \text{ جم طہ} - ب \text{ جم } \frac{ب - ۱}{ب} \text{ طہ} \\ \text{ما} = (ب - ۱) \text{ جب طہ} + ب \text{ جب } \frac{ب - ۱}{ب} \text{ طہ} \end{cases} \dots (۵)$$

اسکی تصدیق طالب علم خود کرے۔ دیکھو شکل ۸۲۔ در تدویر میں

۱ < ب اور گرد تدویر میں ۱ > ب



شکل (۸۲)

۲۹۹

اسی طرح پ کے طریق کے لئے حاصل ہوتا ہے

$$(۶) \dots \dots \dots \begin{cases} ۱ = (ب - ۱) \cdot جم + ب \cdot جم - ۱ \cdot ب \cdot ط + ط \\ ۱ = (ب - ۱) \cdot جب + ب \cdot جب - ۱ \cdot ب \cdot ط + ط \end{cases}$$

بر تدویر کے کسی نقطہ پر ماس معلوم کر نیکی کے لئے (۱) سے حاصل ہوتا ہے [چونکہ  $\frac{فد}{ب} = \frac{۱}{ب}$ ]

$$\frac{فد}{ب} = \frac{جم + ط + جم (ط + فد)}{جب + ط + جب (ط + فد)} = \frac{جم (ط + فد) - صم (ط + فد)}{جب + ط + جب (ط + فد)} \dots (۷)$$

شکل ۸۲ کے حوالہ سے معلوم ہو گا کہ  $\frac{فد}{ب}$  سے پ کا میلان ہے

و ۱ کے ساتھ۔ اس لئے سے پ بر تدویر کا پ پر عا د ہے۔ اسی طرح کا نتیجہ گرد تدویر اور در تدویر کے لئے مسألتوں (۵) سے حاصل ہو سکتا ہے۔ مقابلہ کردہ دفعہ ۱۴۶ کے ساتھ۔

نیز (۱) سے

$$\left( \frac{\text{فرقہ ۱}}{\text{فرقہ ۲}} \right) + \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فرقہ ۲}} \right) = \frac{۲(ب+۱)ب^۲}{۲} = (۲+۲\text{جم فہ}) = \frac{۲(ب+۱)ب^۲}{۲} = \frac{۲(ب+۱)ب^۲}{۲} \text{جم فہ}$$

$$\text{یا } \frac{\text{فرس}}{\text{فرقہ}} = \frac{۲(ب+۱)ب}{۲} \text{جم فہ} \dots \dots \dots (۸)$$

$$\text{پس } \frac{۲(ب+۱)ب}{۲} \text{جب فہ} \dots \dots \dots (۹)$$

کسی مستقل کے اضافہ کی ضرورت نہیں اگر س = ۰۔ جبکہ فہ = ۰۔  
اگر عا دے پ کا میلان و ل کے ساتھ سا ہو تو

$$\text{سا} = \text{طا} + \frac{\text{فہ}}{۲} = \frac{۲+۱}{۲} \text{فہ} \dots \dots \dots (۱۰)$$

$$\text{اس لئے س} = \frac{۲(ب+۱)ب}{۲} \text{جب } \frac{۱}{۲+۱} \text{سا} \dots \dots \dots (۱۱)$$

ضابطہ (۹) کی ایک سادہ تعبیر ہے شکل ۸ سے معلوم ہوتا ہے کہ  
تا پ = ۲ ب جب فہ جس سے

$$\text{س} = ۲ \times \frac{۲+۱}{۲} \text{دورت پ} \dots \dots \dots (۱۲)$$

بالخصوص ایک قرن سے دوسرے قرن تک منحنی کا طول  $\frac{۲(ب+۱)ب}{۲}$  ہے۔  
گرد و گرد اور درت دور کے متعلق متناظر نتائج کی علامت بدلنے سے باسانی  
حاصل ہو سکتے ہیں۔

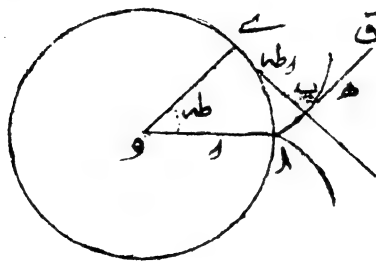
جو منحنی لڑکنے والے دائرہ کا کوئی ایسا نقطہ مرسم کریگا جو محیط پر واقع نہیں ہوتا  
اسے بالترتیب برستداری (Epitrochoid) یا درستداری (Hypotrochoid)

خط لکھا جائیگا بموجب اسکے کہ نقطہ باہر ہو یا اندر۔ اگر مرکز نقطہ کا فاصلہ لڑکنے والے دائرہ کے مرکز سے کم ہو تو مختلف صورتوں میں محدودوں (لا) کے لئے چلے دوسری رقوم کے (صرف) سروں میں ب کی بجائے گ لکھنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۲۴۔ خاص صورتیں۔ (۱) اگر ثابت دائرہ کا نیم قطر لا انتہا بڑا ہو تو

والس تدویر کی صورت پر ہم آجاتے ہیں۔ دفعہ ۱۲۳ (۱) سے متناظر مساواتیں باسانی حاصل ہوتی ہیں اگر لا کی بجائے لا + ر اور لا ط = جب ف = اور (آخر الامر) ط = لکھا جائے۔

(۲) اس کے بعد لڑکنے والے دائرہ کے نیم قطر کو لا انتہا بڑا بنانے سے ایک ایسے خط مستقیم کے کسی نقطہ کا طریق ملتا ہے جو ایک ثابت دائرہ پر لڑکتا ہے اس تعریف کے مطابق جو منحنی ملتا ہے اسے ہم دائرہ کاویجیہ (Involute) کہیں گے۔ دیکھو دفعہ ۱۲۴۔ اسکی مساواتیں دفعہ ۱۲۳ (۴) کی انتہائی صورت کے طور پر معلوم ہو سکتی ہیں یا بلا واسطہ شکل سے فوراً لکھی جاسکتی ہیں۔



شکل (۱۲۳)

ہمیں شکل سے یہ حاصل ہوتا ہے

$$\left\{ \begin{array}{l} لا = رجم ط + ر ط جب ط \\ ما = ر جب ط - ر ط جم ط \end{array} \right. \dots \dots \dots (۱)$$



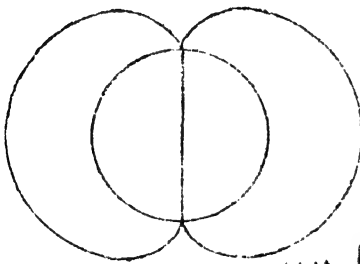
اس کے متناظر استدار منحنی ہے

(۲) .....  $\left\{ \begin{array}{l} (1+h) = \text{جم } ط + 1 ط \text{ جب } ط \\ (1+h) = \text{جم } ط + 1 ط \text{ جب } ط \end{array} \right.$

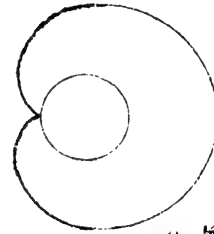
جہاں شکل میں  $h =$  پ ق اور ق مرکز نقطہ ہے۔ خاص صورت  $h = 1$  سے "شیدس کا لوہ" حاصل ہوتا ہے، دیکھو دفعہ ۱۲۶۔

(۳) اگر نیم قطر  $1$  ب متوافق ہوں تو گردشوں کی کسی پوری تعداد کے بعد مرکز نقطہ اپنے ابتدائی مقام پر واپس آئے گا اور اس کے بعد اس کا راستہ اس کے پرانے طریق پر منطبق ہوگا۔ ایسی صورت میں منحنی جبریہ ہوتا ہے کیونکہ (۱) "ما کے لئے جو جملے حاصل ہوتے ہیں ان سے مثلثی تفاعل ساقط ہو سکتے ہیں۔ بعض صورتوں میں مساوات کی قطبی شکل زیادہ سہولت بخش ہوتی ہے۔

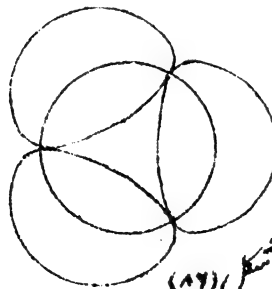
۳۰۱



شکل (۱۵۵)



شکل (۱۵۶)



شکل (۱۵۷)

اشکال ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶ میں "بر" اور "مدر" تدویریں دکھائی گئی ہیں جن میں لڑنے والے

دائرہ کا نیم قطر ثابت دائرہ کے نیم قطر کے ساتھ بالترتیب نسبت  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{4}$  رکھتا ہے۔ ایک دو صورتیں خاص طور پر مشہور خاصیتیں رکھتی ہیں، ان کا ہم تفصیلی معائنہ کرتے ہیں۔

مثال ۱- خط ضویبی (Cardioid) -

اگر دفعہ ۱۲۳ (۳) میں دب = ۱ رکھا جائے تو حاصل ہوتا ہے

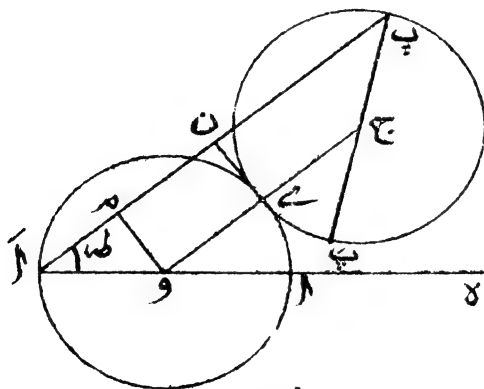
$$لا = ۲ اجم ط + اجم ۲ ط، ۶ = ۲ اجم ط + اجم ۲ ط$$

جس سے  $(1 + \sqrt{2})$  (۱ + حجم طبل) حجم طبل =  $\sqrt{2}$  (۱ + حجم طبل) جب طبل ... (۳)  
اس سے معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ  $(-1, 0)$  کو قطب مان کر جو سمتی نیم قطر کھینچا جائے وہ اس  
مسادات سے حاصل ہوتا ہے

$$(r) \dots \dots \dots (u+1) \text{ جم ط ب } = 2$$

یہ اور طرح سے بھی شکل ۷۰ سے ظاہر ہے جہاں

اَلْاَیُّ = اَلْاَن = ۲ (وے + اَم)



شکل (۸۷)

متناظر استدارمی خط این مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں

لا = ۲ رجم طه + ک جم ۲ طه = ۶ = ۲ رجب طه + ک جب ۲ طه

۳۲

نقطہ (ر-گ) کو قطب ماننے سے یہ ضابطے اس مساوات کے معادل ہیں  
 $r = 2(1 + k \text{ جم طہ}) \dots (۵)$   
 جو گویا منحنی (Limapon) کی قطبی مساوات ہے (دفعہ ۱۲)۔ یہ مساوات بھی  
 باسانی ہندسی طریق پر حاصل ہو سکتی ہے۔  
 مثال ۲۔ ایک دائرہ اپنے سے دگنے نصف قطر والے دائرہ کے اندر لٹکتا ہے۔  
 ۱۲۳ (۶) میں رکھو  $b = \frac{1}{2} a$  تو حاصل ہوگا

$a = 2 \text{ جم طہ} \dots (۶)$   
 یعنی لڑکے والے دائرہ کے محیط پر کا مرسم نقطہ ثابت دائرہ کا ایک قطر مرسم کرتا ہے۔  
 نیز متناظر استدارائی منحنی ان مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$a = 2(b + k \text{ جم طہ}) \dots (۷)$   
 اور یہ قطع ناقص ہے جس کے نیم محور  $b \pm k$  ہیں۔ نیز اگر لڑکے والے دائرہ  
 کی زاوی رفتار مستقل ہو تو مرسم نقطہ کی حرکت ناقصی موسیقی ہوگی۔

ہندسی تبدیلیات کی بنا پر بھی یہ نتائج باسانی حاصل ہوتے ہیں۔ لڑکے والا دائرہ  
 ہمیشہ ثابت دائرہ کے مرکز و میں سے گذرتا ہے اور اگر لڑکے والے دائرہ کا نقطہ  
 پ اپنے ابتدا میں نقطہ  $a$  پر منطبق ہو تو قوس سے  $p = قوس$  سے  $a$ ۔ اب چونکہ نصف  
 قطر  $a$  کی باہمی نسبت  $a : 2$  ہے اس لئے قوس سے  $p$  کے سامنے اس کے  
 محیط پر جو زاویہ بناتا ہے وہ اس زاویہ کے مساوی ہونا چاہئے جو قوس سے  $a$  کے سامنے  
 اس کے اپنے دائرہ کے مرکز پر بناتا ہے اس سے معلوم ہوا کہ  $p$  اور  $a$  نسبت میں  
 منطبق ہوتے ہیں اور  $p$  ثابت قطر  $a$  کو مرسم کرتا ہے۔ نیز چونکہ زاویہ  $p$  و  $a$   
 زاویہ قائمہ ہے اس لئے لڑکے والے دائرہ کے قطر  $p$  کا دوسرا سر ثابت  
 دائرہ کا وہ قطر مرسم کرتا ہے جو  $a$  پر علی القوائم ہے۔ اس لئے  $p$  مستقل  
 طول کا ایک خط مستقیم ہے جس کے سرے دو علی القوائم خطوط مستقیم برواق ہوتے  
 ہیں جو باہم علی القوائم ہیں۔ یہ معلوم ہے کہ ان حالات کے ماتحت  $p$  و  $a$  پر کا  
 کوئی اور نقطہ قطع ناقص مرسم کرتا ہے۔ مقابلہ کرو دفعہ ۴۵ مثال اس کے ساتھ۔

۳۳





ایک بازو وق ایک ثابت نقطہ کے گرد مستقل زاوی رفتار  
ن کے ساتھ حرکت کرتا ہے، مبداء میں سے گزرنیوالے قائم محدود پر  
اس کے ظل ہونگے

لا = ج جم ن ت، ما = ج جب ن ت ..... (۱)

جہاں ج = وق بشرطیکہ کے مبداء کا مناسب طور پر انتخاب کیا جائے  
اگر ایک اور بازو وق نقطہ کے گرد مستقل زاوی رفتار ن کے ساتھ  
گردش کرے اور ایک ہی وقت میں وق کے ساتھ ابتدا محور لا سے  
گھومنا شروع کرے تو محوروں پر وق کے ظل ہونگے

لا = ج جم ن ت، ما = ج جب ن ت ..... (۲)

جہاں وق = ج۔ اگر متوازی الاضلاع وق پ ق کی تکمیل کجائے  
تو و پ سے وق اور وق کا ہندسی مجموعہ تعبیر ہوگا اور پ کے محدود  
ہونگے

لا = ج جم ن ت + ج جم ن ت، ما = ج جب ن ت + ج جب ن ت

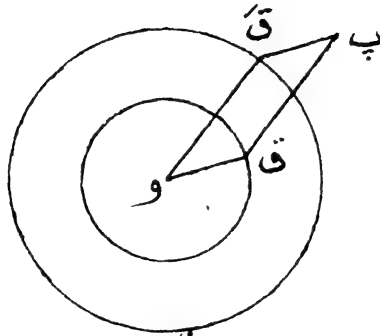
..... (۳)

چونکہ ق پ ہمیشہ وق کے مساوی اور متوازی رہتا ہے اس لئے  
پ کا راستہ ایک ایسے نقطہ کا طریق ہے جو بلحاظ ایک نقطہ ق کے دائری  
مدار میں گزرتا ہے جبکہ ق خود نقطہ کے گرد یکساں طور پر دائرے میں  
حرکت کرتا ہے۔

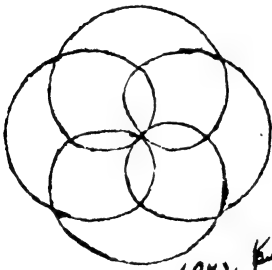
اگر متوازی الاضلاع وق پ ق چار ڈنڈوں کو چلوں کے ذریعہ وصل کرنے سے  
بنایا گیا ہو اور اگر وق کو کے گرد مناسب شج سے گھمایا جائے تو  
و میں سے گزرنے والے کسی ثابت خط سے پ کا فاصلہ دو سادہ موسیقی حرکتوں کو  
تعبیر کریگا جنکے دور  $\frac{2\pi}{N}$  ہونگے۔ لارڈ کیلون کی موج گھڑی (Tidal clock) کا یہ اصول

ہے اسکی مدد سے جلی طو پر ہمیشی اور قمری جوار بھٹا کا انطباق ایک دوسرے پر عمل میں آتا ہے۔

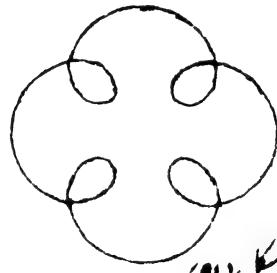
اس طور جو نمونی مترسم کئے جاتے ہیں انہیں بر دورے (Epicycles) کہتے ہیں۔ اگر زاوی زقاروں 'ن' کی ایک ہی علامت ہو تو یہ بر دورے "راست" کہلاتے ہیں اور اگر علامتیں مختلف ہوں تو "الٹے" یا "رجعی"۔ ۳۰۵



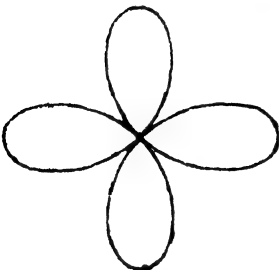
شکل (۹۰)



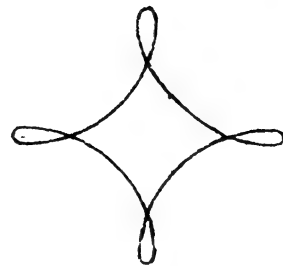
شکل (۹۲)



شکل (۹۱)



شکل (۹۴)



شکل (۹۳)

اشکال ۹۴ تا ۹۸ میں سید ہے اور لٹے بر دوریوں کے چند نمونے دکھائے گئے ہیں\* بالکل اسی طرح سے پ کے راستہ کی یہ تعریف ہو سکتی ہے یہ ایک نقطہ کا طریق ہے جو نقطہ ق کے لحاظ سے دائری مدار میں حرکت کرتا ہے جبکہ خود نقطہ ق کے گرد یکساں دائری حرکت رکھتا ہے۔ اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ ہر بر دوریہ کی دو جداگانہ طریقوں سے نکویں ہو سکتی ہیں۔ یہ ظاہر ہے کہ ہر بر، اور درتدویر اور (زیادہ عام طور پر) ہر بر اور درتدویر سب کے سب بر دوریہ ہیں کیونکہ اگر لٹے والے دائرہ کی زاوی رفتار یکساں ہو اس کا مرکز ج، ثابت دائرہ کے مرکز و کے گرد یکساں طور پر ایک دائرہ مرقم کرتا ہے جبکہ نیم قطر ج پ جس کے اندر مرقم نقطہ پ واقع ہے ج کے گرد یکساں گھماؤ رکھتا ہے۔ دیکھو اشکال ۸۱ تا ۸۲۔

بخلاف اس کے ہر ایک بر دوریہ یا براستداریہ ہے یا دراستداریہ اور بالخصوص ہر ایک سیدھا بر دوریہ یا براستداریہ ہے اور ہر لٹے بر دوریہ دراستداریہ ہے۔ اس امر کو ہم اوپر کی مساوات (۳) کا دفعہ ۱۲۳ کے نتائج کے ساتھ مقابلہ کرنے سے دیکھ سکتے ہیں۔ آگے (دفعہ ۱۵۰) میں "فوری مرکز" کے نظریہ کی ضمن میں اس امر کا ایک سادہ ہندسی ثبوت دیا جائیگا۔

اشکال ۹۱ تا ۹۴ کے سیدھے اور لٹے بر دوریوں کا تعلق چار قروں والی بر اور درتدویروں کے ساتھ واضح ہوگا۔ قدیم ہیئت میں بر دوریہ کثرت سے استعمال ہوتے۔ اگر سیاروں کے مداروں کے خروج المکز اور میڈان نظر انداز کر دے جائیں تو سورج زمین کے گرد ایک دائرہ مرقم کرنا خیال کیا جاسکتا ہے اور کوئی اور سیارہ اسی مستوی سطح میں

\* ایسی مختلف شکلیں بے شمار ہو سکتی ہیں، بر دوریہ جی طور پر ایک لاطینی کے ذریعہ آسانی سے مرقم ہو سکتے ہیں، کئی دلچسپ شکلیں جو اس طور پر حاصل کی گئی ہیں پراکٹر کے رسالہ میں جس کا قبل حوالہ دیا گیا ہے دکھائی گئی ہیں، رسالہ کا صفحہ ۲۹ دیکھو۔



سورج کے گرد ایک دائرہ مشتم کرتا ہے، اس لئے بلحاظ زمین کے سیارہ کا مدار ایک بر دور یہ ہے۔ بطلیموس کے وقت سے سولہویں صدی عیسوی تک اس امر کے متعلق یہی نظریہ قابل قبول رہا، اس کے بعد اس منظر کے متعلق کاپرنیکی کی سادہ تشریح اور توجیہ تدریج غالب آئی گئی۔

ستاروں کے اضافی مداروں میں حلقے ہیں (شکل ۹۱) جو ساکن یا چل نقاط اور "جمع حرکتوں" کا باعث ہوئے ہیں۔ دراصل یہی نقاط اور انہی حرکتیں بطلیموس کے ہاتھوں بر دوریوں کی ایجاد کا باعث ہوئیں۔

برعکس اس کے بلحاظ سورج کے جو چاند کا مدار ہے اس میں حلقے نہیں ہیں اگرچہ یہ بر دوریہ ہے، علاوہ اس کے ہر مقام پر چاند کا مدار اندر کی طرف مقعر ہے۔

مثال ۱۔ اگر ترکیبی دائری حرکتوں کی زاوی رفتاریں مساوی اور مختلف الطول (ن = - ن) ہوں تو  $\Delta = (ج + ج) = جم$  ن ت، ما = (ج - ج) جب ن ت

(۴).....

یعنی محصل حرکت ناقصی موسیقی ہے۔ خاص صورت میں جبکہ ج = ج، ناقص لگتا کہ خط مستقیم رہ جاتا ہے۔  
یہ مثال طبعی علم مناظر میں اہمیت رکھتی ہے۔

مثال ۲۔ بر دوریہ جو خاص صورت اختیار کرتا ہے جبکہ ج = ج قابل توجہ ہے۔  
ساداتیں (۳) ہو جاتی ہیں

$$\Delta = ۲ ج \left( \frac{ن + ن}{۲} \right) ت \quad جم \left( \frac{ن - ن}{۲} \right) ت$$

$$ما = ۲ ج \left( \frac{ن + ن}{۲} \right) ت \quad جم \left( \frac{ن - ن}{۲} \right) ت$$

یا  $\Delta = (جم طما) = د جب طما$ ..... (۶)

جہاں  $طما = \frac{ن + ن}{۲} ت$ ،  $ر = ۲ ج جم \frac{ن - ن}{ن + ن} طما$ ..... (۷)

اس لئے منحنی کی قطبی مساوات اس شکل کی ہے

ر = اجم م طہ ..... (۸)  
 جس میں اگر م > اتو بر دور یہ راست ہے اور اگر م < اتو یہ الٹا یا جہی ہے  
 دفعہ ۱۲ کی شکلوں ۹۲، ۹۳ میں بالترتیب  $۳ = ۴ \frac{۲}{۳}$ ،  $۲ = ۴$

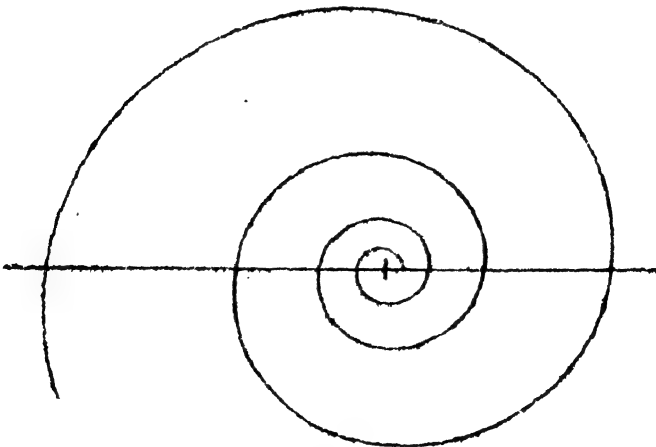
۱۲۶۔ قطبی محدودوں کے لحاظ سے منحنی۔ لولبی خطوط۔

کئی لمپسپ منحنی ہیں جنکی مساواتیں قطبی محدودوں میں زیادہ موزوں طور پر بیان ہو سکتی ہیں، پہلے ہم "لولبوں" (Spirals) کو لیتے۔

(آ) مساوی زاویہ لولبی، یہ خاصیت رکھتا ہے کہ منحنی ہر نقطہ پر سمتی نیم قطر کے ساتھ مستقل زاویہ بناتا ہے۔ اگر اس زاویہ کو ع سے تعبیر کیا جائے تو دفعہ ۶۳ کی رد سے

$$\frac{فر}{فرطہ} = ر مم عا ..... (۱)$$

اس کا حل ہے (دفعہ ۳۸)  $ر = ا قو طہ مم عا$  ..... (۲)

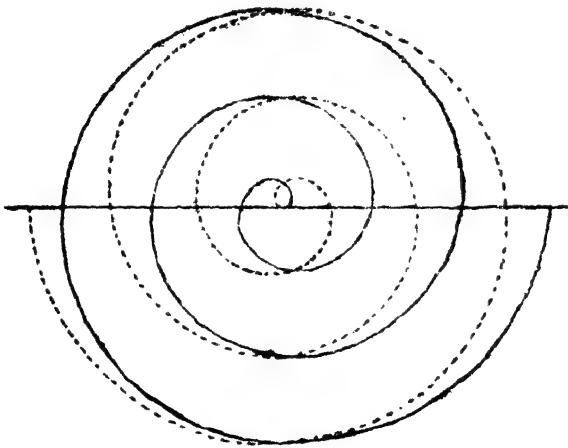


شکل (۹۵)

جیسے طہ =  $\infty$  سے  $\infty$  تک بدلتا ہے ر' صفر سے  $\infty$  تک بدلتا ہے  
 شکل ۹۵ چونکہ دفعہ ۱۱۲ کی رو سے  $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر م}} = \text{جم عدا}$  اس سے معلوم ہوتا  
 ہے کہ منحنی کا طول نیم قطروں لم' لم' کے درمیان ہے

$$\text{لم' فر م} = \text{فر ر} = (\text{لم} - \text{لم}) \text{قط عدا} \dots \dots \dots (۳)$$

(۲) "اثر میڈیسنس کا لولب" ایک ایسے نقطہ کی حرکت سے پیدا ہوتا ہے  
 جو ایک خط مستقیم پر مستقل رفتار سے حرکت کرتا ہے جبکہ یہ خط مستقیم خود اپنے  
 ایک ثابت نقطہ کے گرد یکساں زاوی رفتار سے گھومتا ہے۔  
 علامات میں ر = عت' طہ = ن ت جس سے  
 ر = ۱ طہ =  $\dots \dots \dots$  (۴) اگر ۱ =  $\frac{ع}{ن}$ ۔



شکل (۹۶)

شکل ۹۶ میں منحنی دکھایا گیا ہے، نقطہ دار شاخ طہ کی منفی قیمتوں کے جواب  
 میں ہے۔ اس منحنی کی تکوین کا ایک اور طریقہ دفعہ ۱۲۲ میں بیان کیا گیا ہے۔

(۳) مستکانی لولب کی تعین اس مساوات سے ہوتی ہے

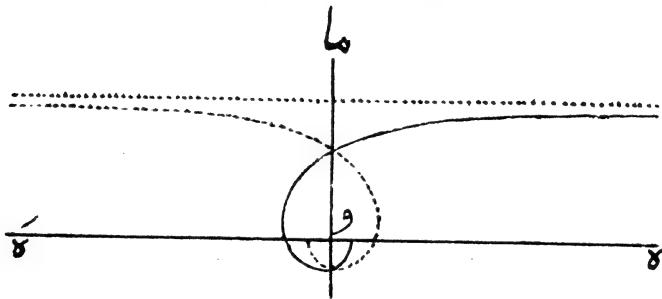
$$r = \frac{1}{\cos \theta} \dots (5)$$

اگر مامعین ہو جو ابتدائی خط پر کھینچا گیا ہے تو

$$r = \cos \theta \quad \text{جب } \theta = 0$$

جیسے  $\theta$  صفر کے قریب پہنچتا ہے  $r$  لامتناہی ہو جاتا ہے مگر مامحدود انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اسلئے خط  $r = 1$  متقارب ہے۔  
شکل ۹ میں نقطہ دار منحنی  $\theta$  کی منفی قیمتوں سے متعلق ہے۔

۳۰۹



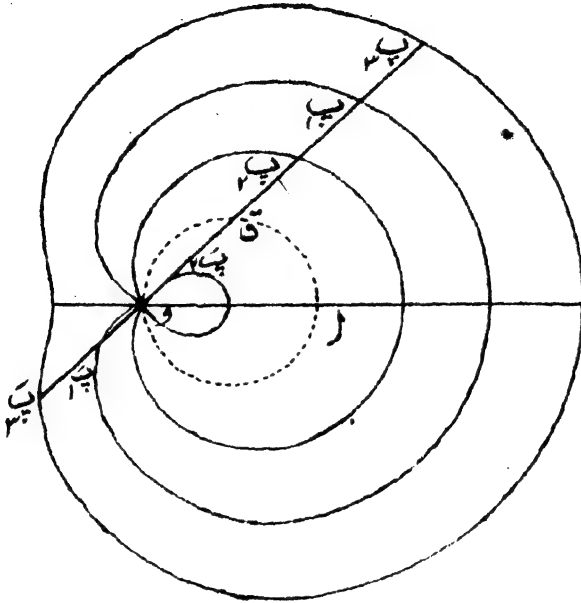
شکل (۹)

۱۲۷ - گہونگا منحنی (Limaçon) اور خط صنوبری -

قطر  $r$  پر ایک ثابت دائرہ بنایا گیا ہے جس کے محیط پر ایک

نقطہ ولیا گیا ہے، اگر وہیں سے گزرنے والے قطر کو ابتدائی خط لیا جائے تو محیط پر کے کسی نقطہ ق کا سمتی نیم قطر ہے

$$r = \cos \theta \dots (1)$$



شکل (۹۸)

اگر اس نیم قطر برق سے مساوی مستقل فاصلوں ج پر دو نقاط  
پ پ لئے جائیں تو ان نقطوں کا طریق ہونا نمونی کیلائیگا۔ اس کی مساوی  
ہوگی

۳۱۰

$r = \text{اجم طما} + \text{ج} \dots \dots \dots (۲)$   
اس میں ہر دو نقاط پ اور پ کے راستے شامل ہیں جبکہ طما صفر سے  
۲۲ تک بدلتا ہے۔ اگر  $\text{ج} > \text{ر}$  تو نمونی و میں سے گزرتا ہے جبکہ  
 $\text{طما} = \text{جم} - \left(\frac{\text{ج}}{\text{ر}}\right)$  اور اس صورت میں حلقہ پ ما ہوتا ہے شکل ۹۸  
میں پ اور پ سے بنو نمونی مرتب ہوتا ہے وہ دیکھو۔ اگر  $\text{ج} < \text{ر}$  تو ر  
صفر نہیں ہو سکتا پ پ کا مرتب نمونی شکل میں دیکھو۔  
اس خاص صورت میں جبکہ  $\text{ج} = \text{ر}$  حلقہ بکر کر قرن بن جاتا ہے اس صورت میں طریق

”قلب کی شکل کا“ یا منوبری شکل کا منحنی بن جاتا ہے، اس کی مساوات ہے

$$r = (1 + \text{جم طہ}) \dots \dots \dots (۳)$$

شکل میں چپ، پ کے سے مرسم شدہ منحنی دیکھو۔ نیز دیکھو شکل ۸۴ دفعہ ۱۲۲۔

۱۲۸۔ منحنی  $r = 1 + \text{جم ن طہ}$ ۔ کئی شہر منحنی اس نمونہ کے

اندر شامل ہوتے ہیں

$$r = 1 + \text{جم ن طہ} \dots \dots \dots (۱)$$

ن کی مساوی مگر مختلف علامت قیمتوں کے لئے جو منحنی پیدا ہوتے ہیں وہ ایک دوسرے کے منقلب ہیں۔ دیکھو دفعہ ۱۳۰۔

$$\text{مثلاً اگر } n = 1 \pm \text{ا تو دائرہ } r = 1 + \text{جم طہ} \dots \dots \dots (۲)$$

اور خط مستقیم  $r = 1 + \text{جم طہ} \dots \dots \dots (۳)$  حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{اگر } n = 2 \pm \text{تو بیرونی کا چشمہ منحنی } r = 1 + \text{جم ۲ طہ} \dots \dots \dots (۴)$$

اور قائم زائد  $r = 2 + \text{جم ۲ طہ} \dots \dots \dots (۵)$  حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات (۴) سے ر کی حقیقی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں طہ کی ان قیمتوں کے لئے جو  $\pm \frac{\pi}{2}$  کے درمیان ہیں اور خیالی قیمتیں ملتی ہیں ان قیمتوں کے

جو  $\frac{\pi}{4}$  اور  $\frac{3\pi}{4}$  کے درمیان ہیں وغیرہ وغیرہ۔ نیز  $r$  اعظم ہے

طہ = ۰۔ اور طہ =  $\pi$  کے لئے وغیرہ۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ چشمہ منحنی دو مطلقوں پر مشتمل ہے اور مبدأ پر اس کا ایک عقدہ ہے۔

$$\text{اگر } n = \frac{1}{2} \pm \text{تو خط منوبری } r = 1 + \text{جم } \frac{1}{2} \text{ طہ یا } r = \frac{1}{2} (1 + \text{جم طہ}) \dots \dots \dots (۶)$$

$$\text{اور کافی } r = \frac{1}{2} \text{ جم طہ} = \frac{1}{2} \text{ یا } r = \frac{1}{2} (1 + \text{جم طہ}) \dots \dots \dots (۷)$$

بالترتیب حاصل ہوتے ہیں -

اگر (۱) کا لو کارٹی تفرق لیا جائے اور حماس اور سستی نیم قطر کے درمیان زاویہ  
فہا زمرہ تو

$$\text{مہم فہا} = \frac{1}{r} - \frac{فر}{فرطہ} = - \text{س ن طہ} \dots\dots (۸)$$

$$\text{یا فہا} = \frac{۲}{r} + \text{ن طہ} \dots\dots (۹)$$

طالب علم اوپر کی مختلف صورتوں میں اس نتیجہ کے مفہوم کا معائنہ کرے -

۱۲۹۔ مماسی قطبی مساوات - اگر کسی منحنی کے کسی حماس پر  
عمود ع کھینچا جائے اور نقطہ تماس کا سستی نیم قطر ہو تو بالعموم ع، ر کا تقابل  
ہوگا۔ جو مساوات اس تعلق کو بیان کرتی ہے اسے ہم منحنی کی ”مماسی قطبی“  
مساوات کہیں گے۔

اگر معمولی قطبی مساوات معلوم ہو تو مماسی قطبی مساوات ان ضابطوں

$$\text{ع} = \text{رجب فہا}، \frac{1}{r} - \frac{فر}{فرطہ} = \text{مہم فہا} \dots\dots (۱)$$

اور منحنی کی دی ہوئی مساوات سے طہا، فہا کو ساقط کرنے سے حاصل  
ہوگی (ضابطوں (۱) کے متعلق دیکھو دفعہ ۶۳)۔

(۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r} + (\text{مہم فہا}) = \frac{1}{r} + \frac{فر}{فرطہ} \dots\dots (۲)$$

بعض اوقات سستی نیم قطر کی بجائے اس کے متکافی یا الٹ کو استعمال کرنا  
زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے۔ اگر لکھا جائے

$$\text{ع} = \frac{1}{r} \text{ تو } \frac{فر}{فرطہ} = - \frac{فر}{فرطہ} \dots\dots (۳)$$

اور ضابطہ (۲) ہو جاتا ہے

$$(۴) \dots\dots\dots \frac{1}{r^2} = \frac{r}{r^2} + \left( \frac{r}{r^2} \right)^2$$

حرکیات میں استعمال کرنے کے نقطہ نظر سے یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اگر معنی کی ماسی قطبی مساوات دی گئی ہو مثلاً

$$(۵) \dots\dots\dots r = f(\theta)$$

تو معنی قابل تعین ہے سو اس بلحاظ تشریق کے کیونکہ

$$(۶) \dots\dots\dots \frac{r}{f(r)} = \frac{r}{f(r)} = \frac{r}{f(r)}$$

$$(۷) \dots\dots\dots \frac{r}{f(r)} = \frac{r}{f(r)}$$

اضافہ شدہ مستقل  $r$  کے تغیر کا اثر صرف اتنا ہے کہ معنی کو با تمام  $r$  کے گرد ایک زاویہ میں سے گھمادیتا ہے۔

مثال ۱۔ مساوی الزاویہ پولی میں

$$(۸) \dots\dots\dots r = \text{رجب } r$$

مثال ۲۔ دائرہ میں  $r = 2$  رجب  $r$  (دفعہ ۶۳) اور  $r = 2$

$$(۱۰) \dots\dots\dots \frac{r}{r^2} = \frac{r}{r^2} = \frac{r}{r^2}$$

$$(۱۱) \dots\dots\dots r = \frac{r}{r^2}$$

جہاں ماسک قطب ہے، اہمیں حال ہوگا  $r = \frac{r}{r^2} - \frac{r}{r^2} = \frac{r}{r^2}$ ، جس سے

$$(۱۲) \dots\dots\dots r = \frac{r}{r^2}$$



اس منحنی کی پیشہ ور خاصیت ہے۔

یہ مثال اور لوچ کی مثال دونوں ایک عام نتیجہ کے اندر شامل ہیں اور یہ نتیجہ اس منحنی کے تمام منحنیات کے متعلق صادق آتا ہے۔

(۱۳)  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$  ..... (۱۳)

دفعہ ۱۲۸ (۹) کی رو سے  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$  ..... (۱۴)

اور  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$  ..... (۱۵)

مثلاً صنوبری (ن)  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$  کی صورت میں  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$  ..... (۱۶)

مثال ۴ - مرکز دار مخروطوں کی حماسی قطبی مساوات یہاں دی جاتی ہے کیونکہ بعض اوقات حرکیات میں یہ استعمال ہوتے ہیں اگرچہ ثبوت میں احصا کے استعمال کی ضرورت نہیں۔

فرض کرو کہ مبدأ مرکز پر ہے مخروطی کی کارٹیزی مساوات یہ ہے

اگر  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$  ..... (۱۷)

اس لئے  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$  ..... (۱۸)

قائم قطع زائد کی خاص صورت میں  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$  ..... (۱۹)

یہی نتیجہ اوپر (۱۵) میں  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$  سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۵ - اس کے بعد ایک اس کے قطب انکر دوسرے اس کے لحاظ سے عمود اور سمتی نیم قطر کو بالترتیب  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$  اور  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$  سے تعبیر کرو۔ چونکہ  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$  سے مساوی ثابت ہوتا ہے اس لئے

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \quad \text{اور اس لئے} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

اب ع خ = ب<sup>۲</sup> اور قطع ناقص میں ر = ر<sup>۲</sup> اس لئے قطع ناقص کے لئے  $\frac{ع}{ر} = \frac{ب^2}{ر - ر^2}$  یا اگر نیم دوزخا ص (ب<sup>۲</sup>/ر) کے طول کول سے تعبیر کیا جائے تو

$$(۲۱) \dots\dots\dots \frac{۱}{ر} - \frac{۲}{ر} = \frac{ل}{ع}$$

قطع دائرہ میں نہیں حاصل ہوتا ہے  $\frac{ل}{ع} = \frac{۱}{ر} + \frac{۲}{ر}$  ..... (۲۲)  
ادھر کی علامت اس شاخ سے متعلق ہے جو مبدأ کے پاس ہے اور نیچے کی دور کی شاخ سے۔

مثال ۶۔ دو منحنی دریافت کرو جس کے لئے ع =  $\frac{۳}{ر}$  ..... (۳)  
(۶) میں درج کرنے اور مکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ط - ع = ۷ = \int \frac{۳}{ر - ۷} = \frac{۳}{۷} \log \frac{۱}{ر - ۷} \text{ جب } \frac{۱}{ر} = ۷$$

یا ر = ۷ جب ۲ (ط - ع) ..... (۲۴)  
جو چشمہ منحنی ہے۔

۱۳۰۔ مربوط منحنی۔ تقلیب۔ کئی ہندی نظریہ ہیں جن میں

ایک منحنی ایک اور منحنی کے ساتھ ایک خاص رشتہ کے ذریعہ متعلق ہوتا ہے۔ اس کی سادہ مثال تقلیب (Inversion) کی ہے جس سے  
اگر ایک ثابت مبدأ سے کسی معلومہ منحنی کا سمتی نیم قطر و پ کھینچا جائے اور و پ پر ایک نقطہ پکایا جائے کہ

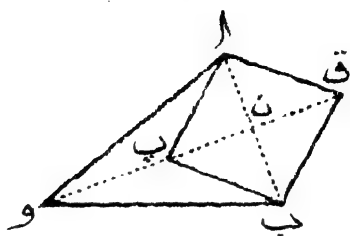
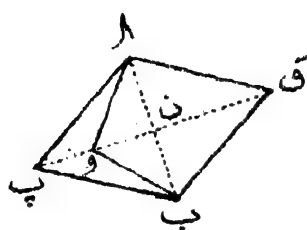
و پ × و پ = م<sup>۲</sup> ..... (۱)  
جہاں م ایک سو دیا ہوا مستقل ہے، نو پ کے طریق کو م پ کے طریق کا معقولہ کہیں گے۔ مبدأ کو مرکز کہا جاتا ہے اور م کو تقلیب کا ”مستقل“۔



دوتروں کا نقطہ تقاطع نہ ہوتو

وہی کہ خطہ لغات کی ہو تو

ویں = وق = وین = پ ن = والہ اپ = مستقل ... (۱)

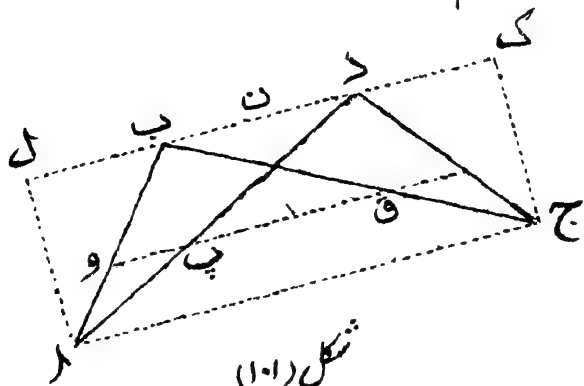


شکل (۱۰۰)

اسلئے اگر آپ (یا ق) سے کوئی ایک منہمی مرتسم کرایا جائے تو ق (یا پ) بلحاظ نقطہ دے کے مقلوب منہمی مرتسم کرے گا۔

خاص طور پر اگر پ کو ایک ثابت چول سی کے ساتھ کر ڈی کے ذریعہ  
منسلک کر دیا جائے اور سی و سی پ توپ کا طریق نقطہ و میں سے  
ایک دائرہ ہوگا اور اس کے ق کا طریق و سی پر علی القوائم ایک خط  
ستقیم ہوگا۔

اس سے اس ضروری جیلی سٹل کا صحیح حل حاصل ہوتا ہے کہ دائری حرکت کو حرکت مستقیم میں راہکاری کے ذریعہ کس طرح تبدیل کیا جائے۔



شکل (۱۰۱)

(۲) ہارٹ (Hart) کا رابطہ۔

اس میں ایک "جلیبی" متوازی الاضلاع اب ج د ہوتا ہے جو چار سلاخوں کے سروں کو چولوں کے ذریعہ جوڑنے سے حاصل ہوتا ہے اور اس کے متبادل اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔ دیکھو شکل (۱۰ صفحہ ۴۳۱)۔

نقطہ و کو ایک ضلع اب میں ایک ثابت چول قرار دیا جائے اور نقاط پ، ق، بالترتیب اضلاع اد اور ب ج میں نقاط ہیں ایسے کہ اپ: پ د = ج ق: ق ب = ا و: و ب = م: ن (د فرض کرو)۔ صریحاً و پ، ق ایک خط مستقیم پر واقع ہیں جو ا ج اور ب د کے متوازی ہے۔

اگر ا اور ج کے قائم ظل ب د پر ل اور گ ہوں اور ت ب د کا نقطہ وسطی ہو تو ا ج × ب د = ن ل × ن ب = دل - ب ل = اد - اب =

اب و پ: ب د = ا و: اب = م: م + ن  
و ق: ا ج = ب و: اب = ن: م + ن

اس لئے و پ × و ق =  $\frac{ن^2}{(م + ن)}$  (اد - اب) = مستقل .... (۲)

اس لئے پ اور ق بلحاظ و کے ثقلوب منحنی مرسوم کرتے ہیں۔  
یہ کی طرح اگر پ کو کڑی پ س کے ذریعہ جو س کے مساوی ہے ایک ثابت چول س کے ساتھ منسلک کر دیا جائے تو دائری حرکت خط مستقیم میں تبدیل ہو سکے گی۔

۱۳۱۔ پائیں منحنی، متکافی قطبی۔ اگر ایک ثابت نقطہ و سے منحنی کے

کسی تماس پیمود سے کھینچا جائے تو اس عمود کے پایہ سے کے طریق کو بلحاظ مبدأ ق کے اہلی منحنی کا "پائیں منحنی" کہتے ہیں۔  
مثلاً مکانی کا پائیں منحنی بلحاظ ماسک کے رائس پر کا تماس ہے۔ قطع ناقص

یا زاہد کا پائیں منحنی بلحاظ کسی ماسکہ کے "معاون دائرہ" ہے۔ مستقیم اگر وے۔ ع اور سیا وہ زاویہ ہو جو وے کسی ثابت خطیتم کے ساتھ بنا ہے تو وے کے قطبی محور، سیا خیال کئے جاسکتے ہیں جبکہ وے قطب ہو۔ اس لئے اگر ع اور سیا کے درمیان رشتہ معلوم ہو سکے تو پائیں منحنی کی قطبی مساوات فوراً لکھی جاسکتی ہے۔ کسی منحنی اور اس کے پائیں کے متناظر نقاط پر سمتی نیم قطر ماسوں کے ساتھ جو زاویے بناتے ہیں وہ باہم مساوی ہوتے ہیں۔ فرض کر دو وے دو متصل ماسوں پ پ سے پ سے پر عمود وے، وے ہیں اور سے سے ممدودہ پر عمود وے ہے۔ وے کے قطر پر جو دائرہ بنایا جائے نقاط سے، سے اس پر واقع ہوتے ہیں۔ اس لئے چار ضلعی وے سے پ کا خارجی زاویہ وے کے مقابل کے داخلی زاویہ وے کے مساوی ہے۔ لیکن انتہا میں یہ وہ زاویے ہیں جو وے اور وے بالترتیب پائیں منحنی کے مماس اور اصلی منحنی کے مماس کے ساتھ بناتے ہیں۔

اور ع عمود ہو و سے پائیں کے ماس پر تو بالاخر

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{ع}{ر} = ع \text{ یا } ع = \frac{ع}{ر}$$

نیز اگر وے = پ سے ن پرے تو ہم لکھ سکتے

وے = ع = وے = ع + مف ع = وے = وے = پ سے = مف سا  
دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقداروں سے قطع نظر کرنے سے

مف ع = ن سے = پ سے مف سا

اسلئے انتہا لینے سے جبکہ پ سے = پ سے پر منطبق ہو ہمیں منحنی کے  
ماس پرستی نیم قطر کے ظل کے لئے یہ جملہ حاصل ہوتا ہے

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{فرع}{فرسا} = پ سے$$

اس نتیجہ کی مدد سے مد منعی یا میں منعیوں کا سوال حل ہو جاتا ہے یعنی اسکی  
مد سے وہ منعی حل جاتا ہے جس کا پائیں کوئی دیا ہو منحنی ہو۔ اگر وہ کو مبدا  
اور مسا کے ابتدائی خط کو محور کا مانا جائے تو نقطہ تماس پ کے محدود ہیں

لا = وے جم مسا۔ پ سے جب سا

ما = وے جب سا + پ سے جم سا

$$(۴) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} لا = ع جم سا - \frac{فرع}{فرسا} جب سا \\ ما = ع جب سا + \frac{فرع}{فرسا} جم سا \end{array} \right.$$

$$(۵) \dots\dots\dots ۱ = \frac{لا}{ر} \pm \frac{ما}{ر}$$

مثال ۱۔ اگر مخروطی کے مرکز پر مبدا ہو اور مسا وہ زاویہ جو ع و لا کے ساتھ بناتا ہے تو مخروطی  
تراشوں کی کتابوں میں یہ دکھایا گیا ہے کہ

$$(۶) \dots\dots\dots ع = و جم مسا \pm پ جب سا$$

اس لئے پائیں منحنی کی قطبی مساوات ہے

$$(۷) \quad r = r_1 \pm r_2 \text{ جب } \theta = \theta_1 \dots \dots \dots (۷)$$

$$(۸) \quad r = r_1 - r_2 \text{ مآ} = \theta_1 \dots \dots \dots (۸)$$

$$(۹) \quad r = r_1 + r_2 \text{ جب } \theta = \theta_2 \dots \dots \dots (۹)$$

مثال ۲۔ نیم قطر کے دائرے میں جہاں قطب و مرکز ج سے فاصلہ ج پر واقع ہو اگر خط و ج کو سا کا مبدأ مانا جائے تو شکل سے ظاہر ہے کہ

$$(۱۰) \quad r = r_1 + r_2 \text{ جب } \theta = \theta_1 \dots \dots \dots (۱۰)$$

اس لئے پائیں منحنی گھونٹکا منحنی ہے

$$(۱۱) \quad r = r_1 + r_2 \text{ جب } \theta = \theta_2 \dots \dots \dots (۱۱)$$

اگر محیط پر ہو جس صورت میں ج = ر تو پائیں منحنی خط منوبری ہوگا

$$(۱۲) \quad r = r_1 + r_2 \text{ جب } \theta = \theta_1 \dots \dots \dots (۱۲)$$

مثال ۳۔ وہ منحنی دریافت کرو جس کا پائیں منوبری

$$(۱۳) \quad r = r_1 + r_2 \text{ جب } \theta = \theta_1 \dots \dots \dots (۱۳)$$

ہے۔ اس مساوات کو اس طرح لکھنے سے

$$(۱۴) \quad r = r_1 + r_2 \text{ جب } \theta = \theta_1 \dots \dots \dots (۱۴)$$

ضابطوں (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$(۱۵) \quad r = r_1 + r_2 \text{ جب } \theta = \theta_1 \dots \dots \dots (۱۵)$$

$$(۱۶) \quad r = r_1 + r_2 \text{ جب } \theta = \theta_1 \dots \dots \dots (۱۶)$$

جو مبدأ میں سے گزرنے والا ایک دائرہ ہے۔

۳۱۸ کسی منحنی ح کے ماس کے قطب کا طریق بلحاظ ایک ثابت مخروطی کے "شکافی قطبی" کہلاتا ہے، مخروطات کی کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ اگر ح کے ماسوں کے قطبوں کا طریق ح ہو تو ح کے ماسوں کے قطبوں کا طریق ح ہوگا "شکافی" کے استعمال کی یہی وجہ ہے۔

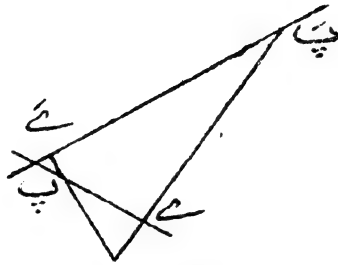
ہم اس صورت کا یہاں محض سرسری ذکر کرتے ہیں جبکہ ثابت مخروطی دائرہ ہو۔ اگر اس دائرہ کا مرکز و ہو اور نیم قطر م تو منحنی ح کے کسی ماس کا قطب پ



اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ اس مماس پر وے عمود نکالا جائے اور وے پر ایک نقطہ پ ایسا لیا جائے کہ

$$\text{وے} \times \text{وپ} = \text{م}^2 \dots\dots\dots (۱۶)$$

اس لئے اس صورت میں، شکافی قطبی، بلحاظ نقطہ و کے دے ہوئے منحنی کے پائیں کا مقلوب ہے۔



شکل (۱۰۳)

اوپر کی شکافی خاصیت کی رو سے، اصلی منحنی کو پ کے طریق کے پائیں کا مقلوب ہونا چاہئے۔ اسکی باسانی تصدیق ہو سکتی ہے۔ کیونکہ اگر پ اصلی منحنی کے ساتھ مماس کا نقطہ تماس ہو اور اگر و پ کے طریق کے مماس کو وے پر لے تو وے

وپاے اور و پاے مساوی ہونگے۔ اس لئے وے پ

زاویہ قائمہ ہے اور وے پ کے پائیں منحنی کو مرسم کرتا ہے۔ اور چونکہ

پاے پاے ہم محیط چار ضلعی ہے اس لئے

$$\text{وپ} \times \text{وے} = \text{وے} \times \text{وپ} = \text{م}^2 \dots\dots\dots (۱۷)$$

اس لئے پ کے طریق کا مقلوب مرسم کرتا ہے۔

مثال ۴۔ دائرہ کا قطبی شکافی بلحاظ کسی بندہ کے ایک مخروطی تراش ہے جس کا بندہ اس کے ہے۔

مثال ۵ کی مانند دائرہ کے پائیں منحنی کا ضابطہ ہے

$$ع = د + ج - جم - سہا \dots\dots\dots (۱۸)$$

سہا کی بجائے طہ اور ع کے لئے  $\frac{۲۴}{۲}$  لکھنے سے چھین قطبی شکافی کی مسادات  
اس شکل میں حاصل ہوتی ہے

$$\frac{۲۴}{۲} = ۱ + ج + جم + طہ \dots \dots \dots (۱۹)$$

جو ایک مخروطی تراش ہے، جس کا ماسکہ مبدأ ہے اور جس کا خروج المرکز  $\frac{ج}{۲}$  ہے۔  
اس لئے مخروطی قطع ناقص، یکسانی یا زائد ہے بموجب اس کے کہ مبدأ دائرہ کے اندر  
ادھر یا باہر ہے۔

$$\text{مثال ۵۔ مخروطی } \frac{۲۴}{۲} \pm \frac{۲۴}{۲} = ۱ \dots \dots \dots (۲۰)$$

کاپائیں منحنی بلحاظ مبدأ کے یہ ہے  
ح = ر + جم + سہا = ب + جب + سہا \dots \dots \dots (۲۱)  
اس لئے قطبی شکافی ہے

$$\frac{۲۴}{۲} = ر + جم + طہ \pm ب + جب + طہ \dots \dots \dots (۲۲)$$

یا  
ر + لا + ب + ما = م \dots \dots \dots (۲۳)  
جو ایک اہم مرکز مخروطی تراش ہے۔

۱۳۲۔ دو قطبی محدود۔ اگر کسی منحنی پر کوئی نقطہ پ ہو

اور دو ثابت نقطوں یا ماسکوں سے، اس سے اس نقطہ کے فاصلے  
(ر، ر) ہوں تو ان فاصلوں کے درمیان جو اس منحنی کے لئے رشتہ ہے  
اس کے ذریعہ اس منحنی کی تعریف ہو سکتی ہے۔ مثلاً

ف (ر، ر) = ۰ \dots \dots \dots (۱)  
اگر زاویوں پ سے س، پ سے س کو بالترتیب طہ، طہ  
سے تعبیر کیا جائے اور جو زاوے نیم قطر ر، ر ماس کے ساتھ بنائے ہیں وہ  
فہ، فہ ہوں تو دفعہ ۱۱۲ کی مانند



کے بعد بھی ایک ثابت نقطہ میں سے گزریں۔

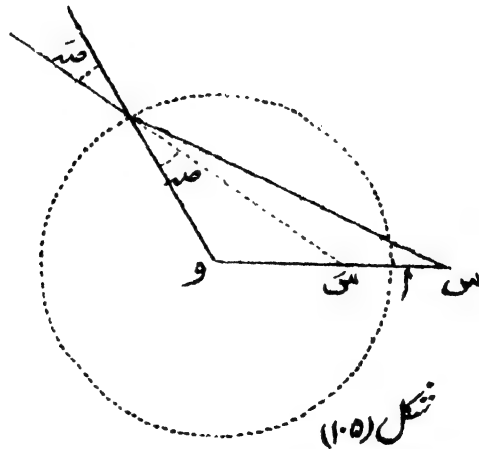
۱) انعکاس کی صورت مثال (۱) کا عکس ہوگی سطح ایسی ہونا چاہئے جو تاں یا زاہد کو، ماسکوں (س، س) کے ملانے والے خط کے گرد پھرانے سے حاصل ہو۔  
۲) انعطاف کی صورت میں اگر دو واسطوں کے انعطاف نما مہ اور مہ ہوں

تو مہ جب صہ = مہ جب صہ ..... (۸)  
جہاں صہ =  $\pm (\frac{\pi}{2} - \text{فہ})$ ، صہ =  $\pm (\frac{\pi}{2} - \text{فہ})$  ..... (۹)  
اس لئے مہ جم فہ  $\pm$  مہ جم فہ = ..... (۱۰)

یا فہ (مہ  $\pm$  مہ) = ..... (۱۱)

سکمل سے مہ  $\pm$  مہ = مستقل ..... (۱۲)  
ایسے نختیات جن میں دو نیم قطروں کے معلومہ ضیعوں کا مجموعہ (یا فرق) مستقل ہو  
کارٹینری بیضہ کہلا تے ہیں کیونکہ ڈی کارٹ نے ہی ابتدا میں علم مناظر کے اس مسئلہ پر بحث کی۔ جب (۱۲) میں خطی علامت ایجابی ہے تو اس قبیل کے اندر دائرہ

$\frac{\text{مہ}}{\text{مہ}} = \frac{\text{ر}}{\text{ر}}$  ..... (۱۳)  
شامل ہو جاتا ہے، دیکھو شکل ۱۰۵۔



مشال ۳۔ کیسینی (Cassini) کے بیضوی مخنجات کی یہ تعریف ہے۔

جہاں م مستقل ہے۔ چونکہ ایک ایسے نقطہ دیپ کے لئے جو خط میں سے ہر نقاط میں سے کے درمیان واقع ہو ر کی بڑی سے بڑی قیمت ج ہے اس لئے متضی دو الگ الگ بیضوں پر مشتمل ہوگا جو بالترتیب میں سے کے گرد بنے ہونگے اگر  $m > j$  اور صرف ایک بیضہ پر مشتمل ہوگا جو دونوں نقاط کو گھیرے ہو ہوگا جبکہ  $m < j$ ۔

اس خاص صورت میں جبکہ  $m = j$ ، منحنی کی عینک جیسی شکل ہوگی۔ اسے ہم برنولی کاپٹسمہ منحنی (Lemniscate) کہیں گے۔ یہ منحنی متعدد مسائل ریاضی میں آتا ہے۔ اگر اس میں کے وسطی نقطہ کو قطب مانا جائے اور  $\theta$  اس کو ابتدائی خط اور  $\phi$  کے لحاظ سے محدودوں کا ایک نظام  $(r, \theta)$  طبعی ہو تو

$$r = r_1 + j_1 - j_2 + j_3 = r_1 + j_1 + j_2 + j_3$$

اس لئے چشمہ منہجی کی مساوات ہے

$$(ج + ج) - ج = ج$$

جو تحول کے بعد ہو جاتی ہے

(15) - . . . . . ج ٢ ج ٢

مثال ۴۔ تقاطعی نغنی۔ اگر میں 'میں' ایک تقاطعی کے شمالی اور ۳۲۲ جنوبی قطب ہوں تو کسی نقطہ پہ پرتوں ہوں گی  $\frac{میں}{۲}$  سمت میں پہ میں اور  $\frac{میں}{۲}$  سمت پہ میں میں۔ "قوت کا خط" ایسا خط ہے جو نقطہ نقطہ حاصل قوت کی سمت میں کھینچا جائے۔ اس امر کو بیان کرنے سے کہ کل قوت اس خط کی عمود وار سمت میں مضرب ہیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{میں}{۲} \text{ جب فہا} + \frac{میں}{۲} \text{ جب فہا} =$$

$$\text{یا } \frac{۱}{۲} \frac{فہا}{فرس} + \frac{۱}{۲} \frac{فہا}{فرس} = \dots (۱۶)$$

اسب چونکہ رجب طہا = رجب طہا اس لئے

$$\text{جب طہا} \frac{فہا}{فرس} + \text{جب طہا} \frac{فہا}{فرس} =$$

$$\text{یا } \text{جم طہا} + \text{جم طہا} = \text{مستقل} \dots (۱۷)$$

"ساوی قوت کا خط" وہ ہے کہ ایک تقاطعی قطب پر جو اسے مرکز کرے کوئی کلام نہ ہو۔ اس امر کو بیان کرنے سے کہ کل قوت اس خط کی سمت میں مضرب ہیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{میں}{۲} \text{ جم فہا} - \frac{میں}{۲} \text{ جم فہا} =$$

$$\text{یا } \frac{۱}{۲} \frac{فرر}{فرس} - \frac{۱}{۲} \frac{فرر}{فرس} = \dots (۱۸)$$

$$\text{جس سے } \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} = \text{مستقل} \dots (۱۹)$$

ساوی قوت کا خط لازماً قوت کے خطوط پر علی القوائم ہونگے۔

## امثلہ ۴۲

## جبرینی

- ۱- ان منحنیات کو مترسم کرو  $\text{ما}^2 = \text{لا}^2 (1 - \text{لا})$  ،  $\text{ما}^2 = \text{لا}^2 + \text{لا} + 1$
- ۲- منحنی  $\text{لا}^2 = \text{ما}^2$  (۱-۱) کو مترسم کرو اور ثابت کرو کہ اسکے حلقہ کا رقبہ  $\frac{1}{16}$  ہے۔ یہ معلوم کرو کہ حلقہ کا عرض کہاں بڑے سے بڑا ہے۔  $[\text{لا} = \frac{1}{4}]$
- ۳- منحنی  $\text{لا}^2 = \text{ما}^2 (1 - \text{لا})$  کو مترسم کرو اور ثابت کرو کہ اس کے دو حلقے ہیں اور ہر ایک کا رقبہ  $\frac{1}{16}$  ہے۔
- ۴- منحنیات  $\text{ما}^2 = \text{لا}^2 (1 - \text{لا})$  ،  $\text{ما}^2 = \text{لا}^2 (1 - \text{لا})$  کو مترسم کرو۔
- ۵- منحنی  $\text{لا}^2 = \text{ما}^2 (1 - \text{لا})$  کو مترسم کرو اور ثابت کرو کہ اس کا رقبہ  $\frac{1}{16}$  ہے۔
- ۶- منحنی  $\text{لا}^2 = \text{ما}^2 (1 - \text{لا})$  کو مترسم کرو اور ثابت کرو کہ اس کا رقبہ  $\frac{1}{16}$  ہے۔
- ۷- ثابت کرو کہ منحنی  $\text{لا}^2 = \text{ما}^2 (1 - \text{لا})$  کی قوس کا طول 'رائس' سے اس نقطہ تک جس کا نصف  $\text{لا}$  ہے، ہے  $\frac{1}{16} (1 + \sqrt{17}) - \frac{1}{16}$
- ۸- منحنی  $\text{لا}^2 = \text{ما}^2$  اور خط  $\text{لا} = \text{ما}$  کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے اس کا اوسط مرکز  $(\frac{1}{16}, \frac{1}{16})$  ہے۔
- ۹- منحنی  $\text{لا}^2 = \text{ما}^2$  محور  $\text{لا}$  کے گرد گھومتا ہے، ثابت کرو کہ وہ حجم جو سطح مکونہ اور محور پر عمود دار ایک مستوی کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ اس مستوی اسطوانہ کے حجم کا ایک چوتھائی ہے جس کا طول اور دائری قاعدہ دونوں وہی ہیں جو سطح مقطعہ کے ہیں۔

۱۰- ان منحنیات کو مترسم کرو  $\text{ما}^2 = \frac{1}{\text{لا}}$  ،  $\text{ما}^2 = \frac{1}{\text{لا} (1 - \text{لا})}$

۱۱- رقبہ جو منحنی  $\frac{\text{ما}^2}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{لا} (1 - \text{لا})}$  (شکل ۷۲) اور اس کے متقارب کے درمیان

گھرا ہوا ہے وہ  $\pi$  ہے۔  
اگر یہی منحنی اپنے متقارب کے گرد گھومتے تو جو مجسم پیدا ہوگا اس کا حجم  $\frac{1}{4}\pi^2$  ہوگا

۱۲۔ ان منحنیات کو مرتسم کرو  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$  ،  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)$

۱۳۔ ان منحنیات کو مرتسم کرو  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$  ،  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)$

۱۴۔ ان منحنیات کو مرتسم کرو  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$  ،  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)$

اعظم اور اقل ممسّین (اگر کوئی ہوں) اور نقاط العطف دریافت کرو۔

۱۵۔ منحنی  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$  (شکل ۷۴) اور اس کے متقارب کے

درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے وہ  $\frac{1}{4}\pi$  ہے۔ اگر یہ منحنی اپنے متقارب کے گرد گھومتے تو جو مجسم پیدا ہوگا اس کا حجم  $\frac{1}{4}\pi^2$  ہوگا۔

۱۶۔ منحنی  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$  کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اس کا رقبہ اسکی دو شانوں اور کسی ایک متقارب کے درمیان  $\frac{1}{4}\pi$  ہے۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ منحنی  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$  (شکل ۷۵) اور اس کے متقارب کے درمیان کا رقبہ  $\frac{1}{4}\pi$  ہے۔

۱۸۔ منحنی  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$  کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ منحنی اور کسی ایک متقارب کے درمیان رقبہ  $\frac{1}{4}\pi$  ہے۔

۱۹۔ منحنی  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$  کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ اس کے ملحقہ کا رقبہ  $\frac{1}{4}\pi$  ہے۔



۲۰۔ منحنی  $MA = \frac{LA}{2}$  (۱۲ = ۱۸) (۱۸ - ۱۸) کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ یہ رقبہ  $\frac{3}{2} \pi$  لاگیر ہے۔

۲۱۔ منحنی  $MA = \frac{LA}{3}$  (۱۸ - ۱۸) + ج کو مرتسم کرو۔

۲۲۔ منحنی  $LA = ۱۸ - ۱۸ = ۱۸ - ۱۸$  کو ت کی حقیقی قیمتوں کے لئے مرتسم کرو۔ اور ثابت کرو کہ یہ ایک ملکہ پیدا کرتا ہے جس کا رقبہ  $\frac{17}{8} \pi$  ہے۔

## امثلہ ۵۳

(زنجیرہ، خط تدویر وغیرہ)

- ۱۔ ثابت کرو کہ زنجیرہ  $MA = ج$  جنر لچ میں  $MA = ج$  ثابت کرو کہ زنجیرہ
- ۲۔ ثابت کرو کہ زنجیرہ ہی ایک منحنی ہے جس میں میں کے پایہ سے ماس پر عمود مستقل طول کا ہوتا ہے۔
- ۳۔ ایک ہی اونچائی پر دو معلومہ نقطے ہیں، ثابت کرو کہ ان تمام زنجیرہ خطوط میں سے جو ان نقطوں میں سے گزرتے ہیں اور جن کے محور انتصابی ہیں ایک زنجیرہ ایسا ہے جس میں ان نقاط کے نیچے مرتب کی گہرائی کم سے کم ہے۔
- نیز ثابت کرو کہ اس زنجیرہ میں مذکورہ نقطوں پر کے ماس ایک دوسرے سے مرتب پڑتے ہیں۔

اگر ان نقطوں کے درمیان فاصلہ ۲ ب ہو تو مرتب کی گہرائی ب جبنا ع

ہے منحنی کی قوس  $\frac{ب جنر ۶}{۶}$  ہے اور دے ہوئے نقاط پر منحنی کا میلان

افق کے ساتھ حجم (قطر ع) ہے جہاں ع مسامات ع مسنر عہ اکی  
ثبت اصل ہے۔

۴- خط جبری (Tractrix) کے کسی نقطہ کے محدود شکلوں میں بیان ہو سکتے ہیں  $\text{لا} = \text{ر} (ع - \text{مسنر عم})$ ،  $\text{ما} = \text{ر}$  قطر ع جہاں  $\text{ع}$  غیر متبدل (parameter) ہے۔

۵- ثابت کردہ خط جبری میں  $\text{ما} = \text{ر}$  فوق ہے۔

جہاں قوس میں قرن سے ناپی گئی ہے۔

۶- اس جسم کا حجم جو خط جبری کو اس کے تقارب کے گرد گمانے سے پیدا ہو  $\frac{2}{3} \pi \text{ر}^3$  ہے۔

اسی جسم کی سطح  $\pi \text{ر}^2$  ہے۔

۷- اگر ایک متحرک نقطہ کے محدود  $\text{لا} = \text{ر}$  جن جن ت  $\text{ما} = \text{ر}$  جب جن ت ہوں جہاں ت وقت ہے تو اس کا راستہ قطع زائد ہوگا اور اس کی رفتار مزدوج نیم قطر کے طول کے متناسب ہوگی جو مزدوج زائد کے ساتھ اسکے تقاطع تک ناپا گیا ہے۔ نیز ثابت کردہ سمتی نیم قطر جو رقبہ عبور کرتا ہے وہ وقت کے ساتھ یکساں طور پر بڑھتا ہے۔

۸- لیسازو کے منحنی  $\text{لا} = \text{ر}$  جب ۲ (ن ت - صہ)  $\text{ما} = \text{ر}$  جب جن ت کے کسی حلقہ کا رقبہ  $\frac{2}{3} \pi \text{ر}^3$  جب ۲ صہ ہے۔

۹- ثابت کردہ کہ لیسازو کا منحنی  $\text{لا} = \text{ر}$  جب جن ت  $\text{ما} = \text{ر}$  جب جن ت ۳۴

منحنی  $\text{ما} = \text{ر} = \frac{\text{لا}}{۲} (۲ - \frac{\text{لا}}{۲} - ۳)$  کے کچھ حصہ پر مشتمل ہے۔ اس منحنی کو مرکز کمزور

۱۰- اگر خط تدویر میں لٹکنے والے دائرہ کی زاوی رفتار مستقل ہو تو رسم نقطہ پ کی رفتار عماد سے پ (شکل ۱) کے متناسب ہوگی۔

۱۱- خط تدویر کو اس کے قاعدہ کے گرد گردش دینے سے جو جسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم  $\frac{2}{3} \pi \text{ر}^3$  ہے جہاں کون دائرہ کا نیم قطر  $\text{ر}$  ہے۔

اسی جسم کی سطح  $\pi \text{ر}^2$  ہے۔

۱۲- خط تدویر کا وہ حصہ جو دو متوازی قرون کے درمیان ہے رأس پر کے ماس کے گرد گھومتا ہے۔ ثابت کردہ کہ سطح گونہ کا رقبہ  $\frac{2}{3} \pi \text{ر}^3$  ہے۔

نیز ثابت کر دے کہ مذکورہ بالا سطح اور ان دائروں کے مستویوں کے درمیان چھبیس  
قرن پیدا کرتے ہیں گھرا ہوا حجم  $\frac{1}{2}\pi$  ہے۔

۱۳۔ خط تدویر اپنے محور کے گرد گھومنے سے جو حجم پیدا کرتا ہے وہ ہے  
 $\frac{1}{4}\pi(16 - 2\pi^2)$ ۔

۱۴۔ اسی مجسم کی سطح  $\frac{1}{4}\pi(4 - \pi^2)$  ہے۔

۱۵۔ ایک آقرن سے دوسرے قرن تک خط تدویر کی قوس ہے اس کا اوسط  
مرکز قاعدہ سے  $\frac{1}{4}\pi$  فاصلہ پر ہے۔

۱۶۔ خط تدویر اور اس کے قاعدہ کے درمیان جو رقبہ ہے اس کا اوسط مرکز قاعدہ  
سے فاصلہ  $\frac{5}{4}$  پر ہے۔

۱۷۔ ثابت کر دے کہ  $\Delta \alpha + \Delta \beta = \Delta \gamma$  میں کسی نقطہ پر کا ماس محدودوں کے

محوروں پر جو متطوع کا تا ہے وہ بالترتیب  $\Delta \alpha$  اور  $\Delta \beta$  کا  $\frac{1}{2}$  ہیں۔

اس طرح اس کی تصدیق کر دے کہ محوروں کے درمیان ماس کا طول مستقل ہے۔

۱۸۔ ساداتوں  $\Delta \alpha = \Delta \beta$  و  $\Delta \gamma = \Delta \delta$  سے ثابت کر دے کہ ستارہ نما

(Astroid) میں  $\frac{\text{فرس}}{\text{فرط}} = 3$  جب  $\Delta \alpha$  و  $\Delta \beta$  اور اس کے منحنی کا کل

طول  $\frac{1}{2}\pi$  ہے۔

۱۹۔ ثابت کر دے کہ ستارہ نما کا کل رقبہ  $\frac{3}{2}\pi$  ہے۔

۲۰۔ دو مقابل کے قروں کو ملانے والے خط کے گرد ستارہ نما کو گھمانے سے

جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم  $\frac{3}{2}\pi$  ہے۔

۲۱۔ منحنی  $\Delta \alpha = \Delta \beta$  و  $\Delta \gamma = \Delta \delta$  جب  $\Delta \alpha$  کے رقبہ کا طول  $\frac{\Delta \alpha + \Delta \beta}{2}$  ہے۔

اور رقبہ جو منحنی گھیرتا ہے وہ  $\frac{3}{2}\pi$  ہے۔

۲۲۔ 'ن' قروں والے بریا در تدویر کا کل محیط  $\frac{8}{3}\pi$  ہے جہاں  $\frac{8}{3}\pi$

- ثابت دائرہ کا نیم قطر ہے۔  
 ۲۳۔ اس شخص کا خاکہ کھینچو جو دو یکساں دائری حرکتوں کو ترکیب دینے سے پیدا ہو  
 جبکہ دائروں کے نیم قطر مساوی ہوں لیکن دور ذرا مختلف ہوں (۱) جبکہ گھماؤ  
 ایک ہی سمت میں ہوں اور (۲) جبکہ گھماؤ مقابل سمتوں میں ہوں۔  
 ۲۴۔ ثابت کرو کہ بردوریہ میں ماس مرکز میں سے نہیں گزر سکتا جب تک کہ  
 $\text{ن ج} > \text{ن ج جہاں دو مقداروں ج ج میں سے ج بڑا ہے (دفعہ ۲۵)}$   
 ۲۵۔ ثابت کرو کہ استدار (۱) =  $\frac{1}{2} \text{طہ} + \frac{1}{2} \text{طہ}$  جب  $\text{طہ} = \frac{1}{2} \text{طہ}$  جب  $\text{طہ} = \frac{1}{2} \text{طہ}$   
 پوری موج کا طول ایک قطع ناقص کے محور کے مساوی ہے جس کے نیم محور  $\frac{1}{2} \text{طہ}$   
 اور  $\frac{1}{2} \text{طہ}$  ہے۔

## امثلہ ۴۴

### قطبی محدود

- ۱۔ ثابت کرو کہ ایک ہی زاویہ والے تمام مساوی الزاویہ لولبی متماثلًا مساوی ہوتے ہیں۔  
 ۲۔ زاویہ عمدا لے مساوی الزاویہ لولبی میں سمتی نیم قطر (د) جو رقبہ عبور کرتا ہے وہ ہے  $\frac{1}{2} (د - د)$  کس عمدا جہاں  $\frac{1}{2} د$  اطراف میں لگی قیستیں ہیں۔  
 ۳۔ ثابت کرو کہ ایشیدس کے لولب میں زاویہ (فہ) جو ماس اور سمتی نیم قطر کے درمیان بنتا ہے وہ اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے  

$$\frac{1}{2} \text{جم فہ} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$
  
 ۴۔ ثابت کرو کہ شکافی لولب میں نیم قطر جو رقبہ عبور کرتا ہے اس کا اضافہ نیم قطر کے متناسب ہے۔  
 ۵۔ ثابت کرو کہ خط صنوبری کے قطب میں سے گزرنے والے تمام دتر ایک ہی طول کے

ہوتے ہیں۔ کیا یہ بات درست ہے کہونگا منحنی کے لئے۔

۶۔ خط صنوبری  $R = 1 + 1$  (جم  $\text{طما}$ ) کا رقبہ  $\frac{3}{4} \pi$  ہے۔

۷۔ منحنی  $R = 1 + 2$  (جم  $\text{طما}$ ) کو مرسم کرد اور ثابت کرو کہ اندرونی طبقہ کا رقبہ  $5\pi$  ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ خط صنوبری میں  $\frac{\text{فرس}}{\text{فرطما}} = 2$  (جم  $\text{طما}$ ) اور اس طرح

دکھاؤ کہ کل محیط  $8$  ہے۔

۹۔ خط صنوبری کو اس کے محور کے گرد گھمانے سے جو حجم پیدا ہوتا ہے وہ  $\frac{16}{3} \pi$  ہے۔

۱۰۔ خط صنوبری میں ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا عرض (محور پر عمود وار)  $\frac{3}{4} \pi$  ہے اور دو ہر حماس محور کو قطب سے فاصلہ  $\frac{1}{4} \pi$  پر ملتا ہے۔

۱۱۔ کہونگا منحنی  $R = 1 + 1$  (جم  $\text{طما}$ ) + ج میں اعظم معین اور اقل فصل معلوم کرو۔

۱۲۔ کہونگا منحنی  $R = 1 + 1$  (جم  $\text{طما}$ ) + ج کا رقبہ جبکہ ج  $< 1$  ہے  $\pi (1 + \frac{1}{4})$

۱۳۔ ہندسی طریق پر ثابت کرو کہ اگر دو خطوط مستقیم دو ثابت دائروں کو ممس کریں اور ایک دوسرے کے ساتھ متعلق زاویہ بنائیں تو ان کے تقاطع کا طریق کہو رگا منحنی ہے۔

۱۴۔ کل رقبہ چشمہ منحنی  $R = 1 + 2$  (جم  $\text{طما}$ ) کا ہے۔

۱۵۔ نیز اس منحنی کے ہر طبقہ کا محیط ہے  $12$   $\frac{\pi}{4}$  جب  $\text{طما}$ ۔

ثابت کرو کہ ناقصی تکملوں (دفعہ ۱۱۱) کی تزییم میں یہ تکملہ مساوی ہے

$\frac{1}{4} \pi$  کے۔

۱۶۔ چشمہ منحنی کے کسی طبقہ کے رقبہ کا اوسط مرکز قطب سے فاصلہ

$\frac{1}{8} \pi$  پر ہے۔

۱۷۔ بر دوریہ  $R = 1$  (جم  $\text{طما}$ ) کے ایک طبقہ کا رقبہ ہے  $\frac{1}{4} \pi$ ۔

۱۸۔ منحنی  $R = 1 + 1$  (جم  $\text{طما}$ ) کو مرسم کرد۔

۱۹۔ ”زیادہ سے زیادہ تجاذب والے مجسم کے لئے“ یعنی اس شکل کے لئے جو مخنی  
 ر = وجم طہ کو ابتدائی خط کے گرد گھمانے سے پیدا ہوتی ہے ذیل کے خواص ثابت کرو  
 (۱) اس کا حجم  $\frac{4}{15} \pi r^3$  ہے۔

(۲) زیادہ سے زیادہ عرض ۲۴.۸ اور ہے مبداء سے ۵۴.۸۹ اور فاصلہ پر۔

(۳) حجم کا اوسط مرکز قطب سے  $\frac{15}{32} r$  اور فاصلہ پر ہے۔

۲۰۔ کسی مخنی کا ”قطبی زیر تماس“ وہ طول ہے جو قطب میں سے گزرنے والے  
 خط پر جو سمتی نیم قطر پر عمود دار ہو، تماس کا ثابت ہے، ثابت کرو کہ اس کا طول  $r \sqrt{\frac{2}{3}}$  ہے۔  
 ثابت کرو کہ شکافی لولب میں قطبی زیر تماس مستقل ہوتا ہے۔

۲۱۔ نیم قطر  $r$  کا دائرہ ہے۔ ثابت کرو کہ اسکے پیچیدگی کی ماسی قطبی مساوات ہے  
 ع = ر۔ جہاں مرکز قطب ہے۔

۲۲۔ ارض میدس کے لولب (شکل ۱۱۱) میں ثابت کرو کہ  $\frac{r}{r_1 + r_2} = \frac{r}{r_1} + \frac{r}{r_2}$

۲۳۔ شکافی لولب (شکل ۹۷) میں ثابت کرو کہ  $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}$

۲۴۔ مخنی ر = وجم م طہ میں ثابت کرو کہ  $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}$

۲۵۔ ان مخنیات ر = وجم م طہ، ر = وجم م طہ میں ثابت کرو کہ بالترتیب

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}$$

۲۶۔ برتدویر (دفعہ ۱۲۳) میں ثابت کرو کہ ر = وجم م طہ، ر = وجم م طہ  
 درتدویر کے لئے متناظر مضابطہ کیا ہے۔

۲۷۔ کارٹیزی مساوات اس مخنی کی دریافت کرو جس میں ع = وجم م طہ، ر = وجم م طہ

- ۲۸ - اس منحنی کی قطبی مساوات دریافت کرو جس میں  $\frac{r^2}{a^2 + b^2} = e$
- ۲۹ - ایک منحنی کی مماسی قطبی مساوات دی ہوئی ہے، اسکی توس کے لئے ضابطہ

$$m = \frac{r}{r^2} \text{ ثابت کرو۔}$$

- ۳۰ - ضابطہ  $e$  فرس = زا فرطہ ثابت کرو اور اسکی ہندی تعبیر بیان کرو۔  
اس لئے ثابت کرو کہ اگر وہ رقبہ جو کسی متحرک نقطہ کا سمتی نیم قطر عبور کرتا ہے وقت کے ساتھ  
یکساں طور پر بڑھے تو نقطہ کی رفتار اس عمود کے بالعکس متناسب ہوگی جو ابتدائے  
راستہ کے مماس پر کھینچا جائے۔

## امثلہ ۴۵

### مربوط منحنی - دو قطبی محدود

- ۱ - مساوی الزاویہ لولب کا مقلوب بلحاظ قطب کے ایک مساوی لولب ہے۔
- ۲ - قطع زائد کا مقلوب بلحاظ مرکز کے مرکز پر ایک نقطہ رکھتا ہے۔
- ۳ - قائم زاویہ کا مقلوب بلحاظ مرکز کے بیرونی کا چشمہ منحنی ہے۔
- ۴ - قطبی مساواتوں کے ذریعہ ثابت کرو کہ خط مستقیم کا مقلوب ایک دائرہ ہے جو  
تقلیب کے قطب میں سے گزرتا ہے اور برعکس اسکے۔
- ۵ - قطبی مساوات کے مد سے ثابت کرو کہ دائرہ کا مقلوب دائرہ ہے۔
- ۶ - قطع مستطانی کا مقلوب بلحاظ اس کے خط صنوبری ہے۔  
کسی مخروطی کا مقلوب بلحاظ اس کے گہونکا منحنی ہے۔

۷ - ناقص  $\frac{a^2}{r^2} + \frac{b^2}{r^2} = e$  کا مقلوب بلحاظ مرکز کے منحنی

$$(a^2 + b^2) = m^2 \left( \frac{a^2}{r^2} + \frac{b^2}{r^2} \right) \text{ ہے۔}$$

نیز ثابت کرو کہ جہاں منحنی محور کا کٹا ہے وہاں پر منحنی مبدأ کی جانب مقعر یا محدب ہو گا جو جیسے کہ بے  $\frac{1}{2}$  دے۔

۸۔ خط منوبری قطع مکانی کا مقلوب ہے بلحاظ ماسکس کے۔ اس امر کو استعمال کرنے سے یا کسی اور طرح سے ثابت کرو کہ قرن میں سے گزرنے والے کسی وتر کے سروں پر کے عماد ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ پڑتے ہیں اور ان کے تقاطع کو قرن کے ساتھ ملائیو لا خط وتر پر عمود وار ہوتا ہے۔

۹۔ تعلیب سے یا کسی اور طرح سے ثابت کرو کہ منوبری خطوط  $r = 1$  (۱ + جم طم)  $r = 2$  (۱ - جم طم) ایک دوسرے کو علی القوائم کاٹتے ہیں۔

۱۰۔ منحنی اور اسکے مقلوب کے متناظر عنصر فرس، فرس ہیں، ثابت کرو کہ فرس : فرس =  $r$  :  $m$  :  $m$  :  $r$  جہاں  $r$ ،  $r$  سستی نیم قطر ہیں۔

۱۱۔ قطع مکانی کا پائیں منحنی بلحاظ رائس کے بلابی خط (Cissoid) [دفعہ ۱۱۹ (۱۶)] ہے۔

۱۲۔ اگر ایک منحنی کے دو مماس ایک دوسرے سے مستقل زاویہ بنائیں تو ان کے نقطہ تقاطع (پ) کا طریق پ اور دو نقاط مماس میں سے گزرنے والے دائرہ کو کس کرتا ہے۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ پائیں منحنی کا رقبہ اس ضابطہ  $\frac{1}{2} \int r^2 dr$  سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ پائیں کی قوس اس ضابطہ  $\int r dr$  سے حاصل ہوتی ہے۔

۱۵۔ قطع ناقص کے پائیں منحنی کا رقبہ ہے  $\frac{1}{2} \pi (a^2 + b^2)$  جبکہ مرکز قطب ہو اور  $a$ ،  $b$  نیم محور ہوں۔

۱۶۔ قطع زائد  $\frac{r^2}{a^2} - \frac{r^2}{b^2} = 1$  کا پائیں منحنی بلحاظ مرکز کے دو طوقوں پر

مشکل ہے جن میں سے ہر ایک کا رقبہ  $\frac{1}{2} \pi (a^2 + b^2)$  (۱۶) (ب) مس  $\frac{1}{2} \pi$  ہے۔

۱۷۔ اگر (قائم) محدود کے مبدأ سے اور نقطہ (لام، مام) سے منحنی کے مماس پر عمود  $c$  اور  $e$  کیچنے جائیں تو ثابت کرو کہ



ع = ع - لا، جم سا - ما، جب سا

جہاں سا عمودوں کا میلان ہے غور کا کے ساتھ -

۱۸ - ایک بند بیضوی منحنی کے دو پائیں منحنی لمبا غسدا و اور ایک نقطہ (لا، ما) کے ہیں جبکہ یہ دونوں نقطے منحنی کے اندر واقع ہیں۔ ان پائیں منحنیوں کے رقبے (ا، ا) ہیں، ثابت کرو کہ

ا، ا - لا، لا، ع جم سا فرسا - ما، ع جب سا فرسا + ۱/۲ (لا، لا + ما)

۱۹ - ایک نقطہ کو قلب مانکر اگر ایک بند بیضوی منحنی کا پائیں منحنی لیا جائے تو اس کا رقبہ مستقل ہوتا ہے، ثابت کرو کہ نقطہ مذکورہ کا طریق دائرہ ہے - اور مستقل کی مختلف قیمتوں کے جواب میں جو دائرے حاصل ہوتے ہیں وہ ہم مرکز ہیں -

نیز اگر و مشترک مرکز ہو تو بلحاظ کسی اور نقطہ پ کے جو پائیں منحنی حاصل ہوتا ہے اس کا رقبہ اس پائیں منحنی کے رقبہ سے جو بلحاظ و کے لیا جائے بقدر دائرہ (نیم قطر و پ) کے رقبہ کے زیادہ ہوتا ہے -

۲۰ - مکانی ما = ۲۷ لا کا منحنی پائیں بلحاظ راس کے منحنی ۲۷، ما = (۲۷ - لا) ہے -

۲۱ - کس صورت میں ع = لا جم سا ۹ -

۲۲ - ثابت کرو کہ جس منحنی کی صورت میں ع = لا جب سا جم سا وہ متساویہ نما

لا + ما = لا ہے -

۲۳ - بتاؤ کہ مساوات لا + ز = م (مستقل) کو بلحاظ قوس (م) کے تحقق کرنے سے کیا خاصیت حاصل ہوتی ہے اور نتیجہ کی ہندسی طریق پر تصدیق کرو -

۲۴ - کینینینی کے بیضوی کے کسی نقطہ پ پر عماد کھینچنے کا یہ عمل ثابت کرو -

پ سی اور پ سی میں بالترتیب نقطے ق اور ق لوائے کہ پ ق = پ سی

اور پ ق = پ سی - جو خط پ کو ق ق کے وسطی نقطہ کے ساتھ ملاتا ہے وہ مطلوبہ عماد ہے -

۲۵۔ متوازی شعاعوں کا ایک نظام اس طور پر منعکس ہونا مطلوب ہے کہ یہ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے، ثابت کرو کہ انوکھی کسی منحنی قطع مکانی ہے۔

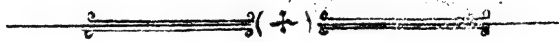
۲۶۔ متوازی شعاعوں کا ایک نظام اس طور پر منعکس ہونا مقصود ہے کہ انقطاع کے بعد شعاعیں ایک ثابت نقطہ میں سے گزریں۔ ثابت کرو کہ انقطاعی منحنی ایک مخروطی تراش ہے اور مخروطی کا مخروط مرکز انقطاع نماؤں کی نسبت کے مساوی ہے۔

۲۷۔ ثابت کرو کہ کارٹینیئر بیضوی کی مسادات اس شکل کی ہے

$$r^2 - 2r(1 + b \text{ جم جھ}) + c = 0$$

جہاں کسی ماسک کو قطب مانا گیا ہے۔

۲۸۔ ثابت کرو کہ کارٹینیئر بیضوی لازماً ایک بند منحنی ہو گا اگر اس صورت کو جس میں منحنی قطع تراش کی ایک شاخ ہے مستثنیٰ کر دیا جائے۔



# دسواں باب

## انحنا

۱۳۳۔ انحنا کا ناپ - مستوی منحنیات کے نظریہ میں احصا کا

جو استعمال ہے اس کے متعلق اب تک ہمیں منحنی کے مختلف نقاط پر ماس کی سمیت کے ساتھ ہی سرکار رہا ہے، ابھی خاص طور پر ہم نے اس پر غور نہیں کیا کہ کس طرح نقطہ بہ نقطہ یہ سمت منحنی پر بدلتی ہے۔

انحنا کا مضمون کئی غیر متعلق پہلوؤں سے بحث میں لایا جاسکتا ہے اور اگر یہ تمام طریقوں سے بالکل وہی ضابطے حاصل ہوتے ہیں تاہم طالب علم کے لئے یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اساسی طور پر استدلال میں وہ ایک دوسرے سے بالکل مختلف ہیں۔

\* پہلے طریقہ میں ہم منحنی کی کسی قوس کے ”پورے“ یا ”مکمل“ انحنا کی تعریف سے ابتدا کرتے ہیں، پورا انحنا وہ زاویہ مفہ مسا ہے جس میں سے ماس گھوم جاتا ہے جبکہ اس کا نقطہ تماس قوس کے ایک سرے سے دوسرے سرے تک سفر کرتا ہے۔

اور قوس کا ”اوسط انحنا“ اس نسبت سے متعین ہوتا ہے جو پورے انحنا کو قوس کے طول (مفہ مسا) کے ساتھ ہو پس اس تعریف کے مطابق اوسط انحنا  $\frac{\text{مفہ مسا}}{\text{مفہ مسا}}$  ہے۔

\* اور طریقہ دفعات ۱۳۶، ۱۳۷ میں بیان کئے گئے ہیں۔

اور تعریف کے طور پر منحنی کے ”کسی نقطہ پ پر کا انحنا“ اس لا انتہا چھوٹی قوس کا اوسط انحنا خیال کیا جاتا ہے جو اس نقطہ پر منتہی ہوتی ہے۔ پس احصا کی ترقیم کے مطابق کسی نقطہ پر کا انحنا

فرسا  
فرس = (۱) سے تعبیر ہوگا۔

ایک دائرہ کی جس کا نیم قطر ہو مف س = رمف سا  
اور اس لئے  $\frac{فرسا}{فرس} = \frac{۱}{ر}$  جس سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک دائرہ کا انحنا اس کے نیم قطر کے شکافی سے ناپا جاتا ہے۔ پس اگر ایک دائرہ کا نیم قطر س ہو جس کا انحنا ہی ہے جو کسی دے ہوئے منحنی کا نقطہ پ پر ہے تو

فرسا  
فرس = (۲)

۳۳۷ اس نیم قطر س کے دائرہ کو جس کا مماس نقطہ پ پر رہی ہو اور جس کا قطر اسی سمت میں ہو جو مماسی منحنی کا ہے ہم ”دائرہ انحنا“ کہیں گے۔ اس کے نیم قطر کو ”نیم قطر انحنا“ کہا جائیگا اور اس کے مرکز کو ”انحنا کا مرکز“۔ اگر منحنی کے نقطہ پ سے کسی خاص سمت میں ایک خط مستقیم کھینچا جائے تو اس خط پر جو طول یہ دائرہ قطع کرتا ہے اسے اس سمت میں کے ”وتر انحنا“ کہتے ہیں۔ اگر وتر کی سمت عماد کے ساتھ زاویہ ط بنائے تو وتر کا طول ل اس مساوات سے حاصل ہوگا

ل = ۲ س جم ط ..... (۳)

اگر انحنا کے مرکز کے قائم محدود (ضما، عا) ہوں تو قائم ظل ڈالنے سے ضما = لا۔ ہا جب سا، عا = ما ہا س جم سا ..... (۴)  
بشرطیکہ سا کا صفر اس مقام سے شروع ہو جہاں مماس لا کے محور کے متوازی ہوتا ہے۔

انحنا کا مرکز منحنی کے دو متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع ہوتا ہے فرض کرو کہ







مثال ۳۔ برتدیر (Epicycloid.) دفعہ ۱۲۳ (۱۱) میں

$$\text{مس} = \frac{۴(ب+۱)}{۱} \text{ جب } \frac{۱}{ب+۲} \text{ سا۔..... (۷)}$$

$$\text{اور اس لئے مس} = \frac{۴(ب+۱)}{ب+۲} \text{ جم } \frac{۱}{ب+۲} \text{ سا}$$

$$\text{(۸).....} \frac{۴(ب+۱)}{ب+۲} \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ فسا}$$

اس لئے شکل ۸۱ (دفعہ ۱۲۳) کے حوالہ سے ظاہر ہے کہ

$$\text{(۹).....} \frac{۴(ب+۱)}{ب+۲} \text{ پے}$$

جہاں پ ہے عماد کا طول ہے مرشم نقطہ اور ثابت دائرہ کے درمیان۔

$$\text{مثال ۴۔ مکافی} \quad ۴ = ۱۲ \text{ میں} \quad ۲ = ۱۲ \text{ مم سا۔..... (۱۰)}$$

$$\text{جس سے جب سا} = \frac{۱۲}{\text{فرسا}} = \frac{۱۲}{\text{جب سا}} \text{ فرسا}$$

$$\text{(۱۱).....} \frac{۱۲}{\text{جب سا}} \text{ یا مس} = \frac{۱۲}{\text{جب سا}}$$

منفی علامت کا مفہوم ہے کہ سا گھٹتا ہے جیسے مس بڑھتا ہے۔

$$\text{مثال ۵۔ اگر قطع ناقص} \quad ۱۲ = ۱۲ \text{ جم فسا} \quad ۱۲ = ۱۲ \text{ جب فسا۔..... (۱۲)}$$

$$\text{کو دائرہ} \quad ۱۲ = ۱۲ \text{ جم فسا} \quad ۱۲ = ۱۲ \text{ جب فسا۔..... (۱۳)}$$

$$\text{کا قائم ظل تصور کیا جائے تو} \quad \frac{\text{فرسا}}{\text{فرسا}} = \text{بسا۔..... (۱۴)}$$

۳۳۰ جہاں بسا فردوج نیم قطر ہے۔ کیونکہ قوس کا عنصر ۱۲ مم فسا سے بد لکر مم فسا

ہو جاتا ہے اور متوازی نیم قطر ۱۲ سے بد لکر بسا ہو جاتا ہے۔ نیز چونکہ ۱۲ مم فسا

اور ۱۲ مم فسا رقبہ کے متناظر عنصر ہیں اس لئے

$$\text{بسا مم فسا} = \frac{۱۲}{۱} \text{ مم فسا}$$



$$(۱۵) \dots\dots\dots \frac{فرقا}{فرسا} = \frac{بہا}{اب}$$

$$(۱۶) \dots\dots\dots \frac{فرسا}{فرسا} = \frac{فرسا}{فرسا} \times \frac{فرسا}{فرسا} = \frac{فرسا}{فرسا} = س$$

اگر ماسی خط پر مرکز سے عمود ع ہو تو ع بہا = اب اور اوپر کا نتیجہ اس طور پر لکھا جاسکتا ہے

$$(۱۷) \dots\dots\dots \frac{بہا}{ع} = س \text{ یا } \frac{اب}{ع} = س$$

چونکہ ع = اجم س + ب جب س = ا (۱- ز جب س)

مؤخر الذکر صورت اس شکل کے معادل ہے (ز خروج المکرز ہے)

$$(۱۸) \dots\dots\dots س = \frac{ا (۱- ز جب س)}{ا (۱- ز جب س)}$$

اس ضابطہ سے ارضیات (Geodesy) میں ایک شہور نتیجہ حاصل ہوتا ہے اگر زمین کی شکل کو گردش کا ناقص نا خیال کیا جائے تو ز کو نظر انداز کرنے سے عرض بلد س کی رقوم میں نیم قطر انحناء کے لئے جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{فرسا}{فرسا} = ا (۱- ز) + \frac{۳}{۲} ز جب س = ا (۱- \frac{ص}{۲} - \frac{۳}{۲} ص جب س)$$

$$(۱۹) \dots\dots\dots \frac{ا-ب}{ا} = \frac{۱}{۲} ز یعنی صہ سے نصف النهار کی ناقصیت$$

(Ellipticity) تعبیر ہوتی ہے (۱۹) کو مکمل کرنے سے نصف النهار کی توسل کا طول استواء سے عرض بلد س تک حاصل ہوتا ہے

$$(۲۰) \dots\dots\dots س = ا (۱- \frac{ص}{۲}) - \frac{۳}{۲} ص جب س$$

مثال ۶ - مساوی الزاویہ لولبی (دفعہ ۱۲۶) میں

(۲۱) .....  $سا = ط + ع$   
 اس سے  $\frac{فرسا}{فرس} = \frac{فرط}{فرس} = \frac{جب ع}{ر}$

(۲۲) .....  $\frac{ر}{جب ع} = سا$   
 پس نیم قطر انحن کے سامنے سینا پر زاویہ قائم بنتا ہے۔

۱۳۵۔ نیم قطر انحن کے لئے ضابطے۔ انحن کا ضابطہ  $\frac{فرسا}{فرس}$   
 آسانی سے کئی اور صورتوں میں بیان کیا جاسکتا ہے۔  
 (۱) قائم کاری تیزی محدود میں

(۱) .....  $\frac{فرما}{فرلا} = مس سا$

(۳۳۸) ..... اسلئے  $\frac{فرسا}{فرس} = \frac{فر (فرما)}{فرس (فرلا)} = \frac{فرما}{فرلا} = \frac{جم سا}{فرلا} = \frac{فرما}{فرلا}$

(۲) ..... جس سے  $\frac{1}{سا} = \frac{1}{\left\{ 1 + \left( \frac{فرما}{فرلا} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}$

اس شکل سے پھر ظاہر ہے کہ نقطہ انعطاف پر، جہاں  $\frac{فرما}{فرلا} = 0$ ۔  
 (دفعہ ۶) انحن صفر ہوتا ہے۔

جب  $\frac{فرما}{فرلا}$  ایک چھوٹی مقدار ہو تو ضابطہ (۳) سے حاصل ہوتا ہے  
 تقریباً

(۳) .....  $\frac{1}{سا} = \frac{فرما}{فرلا}$

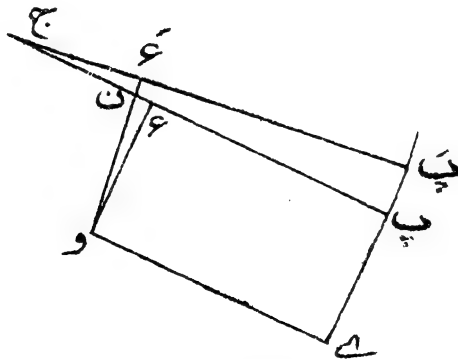
اور تناسبی خط ابھیں دوسرے رتبہ کی ہوگی۔ صریحاً یہ ضابطہ،  $\frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}}$  کی نقل ہے کیونکہ جب 'سا' چھوٹا ہو تو 'سا' کی بجائے  $\frac{\text{فرسا}}{\text{فرسا}}$  (مس سا) لکھا جاسکتا ہے اور  $\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}$  کی بجائے  $\frac{\text{فرسا}}{\text{فرسا}}$ ۔ سلاخوں کی خمیدگی کے نظریہ میں اس ضابطہ کا استعمال بہت اہمیت رکھتا ہے۔

(۲) دفعہ ۳۱ میں یہ ثابت کیا گیا تھا کہ نیم قطر کا ظل (ص) حماس پر حاصل ہوتا ہے

$$\text{ص} = \frac{\text{فرع}}{\text{فرسا}} \dots \dots \dots (۳)$$

اگر مبدأ سے دو متصل عمادوں پ ج، پ ج پر عمود و ع، و ع ہوں اور اگر و ع پ ج سے ن پر ملے تو بالآخر

و ع - و ع = ع ن = ج ن مف سا یا مف ص = ج ن مف سا



شکل (۱۰۸)

۳۳۹ اس لئے ج ع یا ج ن کی انتہائی قیمت  $\frac{\text{فرص}}{\text{فرسا}}$  ہے جس سے

(۳) دفعہ ۱۱۲ کی ترقیم کے موافق

$$\frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \text{جسم فضا} = \frac{\text{فر}}{\text{فرس}} \dots \dots \dots (۶)$$

چونکہ  $\frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} = \frac{\text{فرس}}{\text{فر}} \times \frac{\text{فر}}{\text{فرع}}$  =  $\frac{\text{فرع}}{\text{فرسا}}$  ص  $\frac{\text{فرس}}{\text{فر}} \times \frac{\text{فر}}{\text{فرع}}$  اِس سے حاصل ہوتا ہے

$$(4) \dots\dots\dots \frac{\text{رفر}}{\text{فرع}} = \sqrt{\phantom{x}}$$

یہ ضابطہ بڑی سہولت سے استعمال ہو سکتا ہے جب ماسی قطبی مساوات (دفعہ ۱۲۹) معلوم ہو۔

مثال ۱۔ زنجیر  $u = \frac{1}{x} \log x \dots \dots \dots (۸)$

کی صورت میں

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرما}} = \text{جبی} \frac{\text{لا}}{\text{لا}} \quad \frac{\text{لا}}{\text{لا}} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرما}} = \frac{1}{\text{فرما}} \frac{\text{لا}}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{فرما}} \text{جبی} \frac{\text{لا}}{\text{لا}} + 1 = \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فرما}} \right) = \text{جبی} \frac{\text{لا}}{\text{لا}}$$

اس لئے  $(9) \dots \dots \dots \frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = r = 5$

چونکہ ماہِ اوقطاسیہ اس لئے نتیجہ (۹) دفعہ ۳۴ مثال کے مطابق ہے۔

مثال ۲- مکانی میر  $\Rightarrow \frac{۲۶}{۱} = (۱۰) \dots \dots \dots$

$$(11) \dots\dots\dots \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_2}{r_1} = \checkmark$$

مثال ۳۔ مرکزِ وزارتِ اشوں میں (دفعہ ۱۲۹، مثال ۴)

$$\frac{ؤب}{ع} = ب \pm \frac{ؤ}{ع} \quad (۱۲)$$

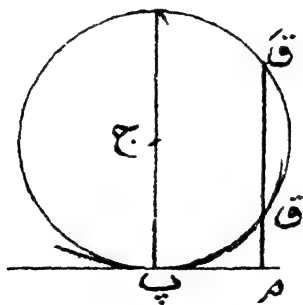
$$\frac{ؤب}{ع} = ب \pm \frac{ؤب}{ع} \quad (۱۳)$$

مقابلہ کرو دفعہ ۱۳ مثال ۵۔

۱۳۶۔ نیوٹن کا طریقہ۔ انحصار بحث کرنے کا ایک اور طریقہ

ہے جسے نیوٹن نے استعمال کیا۔ اس میں ایک دائرہ کھینچا جاتا ہے جو  
منحنی کو پُرکس کرتا ہے اور ایک پاس کے نقطہ ق میں سے گذرتا  
ہے۔ اس کے بعد اس دائرہ کے نیم قطر کی انتہائی قیمت معلوم کی جاتی ہے  
جبکہ ق پ کے لا انتہا قریب آجائے۔

یہ باکسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ انتہائیں یہ دائرہ بالکل وہی ہے جو پ پر کا  
انحن کا دائرہ ہے اور جس کی تعریف دفعہ ۳۳ میں کی گئی ہے



نخل (۱۰۹)

کیونکہ اگر ج مرکز ہو تو ج پ = ج ق اور اس لئے پ اور ق کے

درمیان کوئی نقطہ ہے ایسا ضرور ہوگا کہ اس کا فاصلہ ج سے اعظم یا اقل ہو اور اسلئے ایسا کہ ج سے بڑھ کر کا عماد ہو۔ انتہا میں ہے پ کے لائنیاں قریب آجاتی ہیں اور ج متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع ”مرکز انحناء“ پر منطبق ہوتا ہے۔ نیوٹن کے طریقہ سے نیم قطر انحناء کے لئے ایک نہایت سادہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ پ کے تماس پر ق ق ہر ایک عمود کھینچا گیا ہے جو دائرہ سے پھر ق پر اور تماس سے ہر پ لگتا ہے۔ چونکہ

$$مپ = مق \times مرق \text{ اس لئے}$$

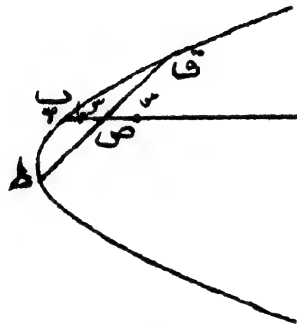
[illegible]

$$\frac{1}{r} = \text{فم} (د) \text{ جم}^2 \text{ سا} = \frac{\text{فم} (د)}{\frac{1}{3} [\text{فم} (د) + 1]} \dots (۳)$$

اور یہ ضابطہ (۲) دفعہ ۱۲۵ کے بالکل مطابق ہے صرف ترقیم کا فرق ہے۔

مثال ۱۔ قطع ناقص میں فرض کر دو کہ وتر ق ط ' پ پر کے ماس کے متوازی  
ہے اور پ میں سے گزرنے والے قطر سے ص پر ملتا ہے (شکل ۱۱۰)۔ نیچے کے  
ہندسہ کی رو سے

$$\text{ق ص}^2 = \text{ص پ} \times \text{پ ص}$$



شکل (۱۱۰)

جہاں ص ماسک ہے۔ اس لئے محور کے متوازی وتر ناقص کے لئے

$$\text{ق} = \text{نسا} = \frac{\text{ق ص}^2}{\text{پ ص}} = \text{ص پ} \dots (۴)$$

اگر پ پر کا مادہ محور کے ساتھ زاویہ طہ بنا لے تو جم طہ =  $\frac{\text{ص پ}}{\text{پ ص}}$   
جہاں ص ماسک ہے پ پر کے ماس پر مود ہے اسلئے

$$\text{ص} = \frac{1}{r} \text{ ق ق ط طہ} = \frac{\text{ص پ}^2}{\text{ص ص}} = \frac{\text{ص پ}^2}{\frac{1}{3} \text{ ص پ}} \dots (۵)$$





جانتے ہیں کہ  $\text{جم طہ} = \frac{\text{ج}^۲}{\text{ج}}$  جہاں  $\Delta$  محور اعظم کا سرا ہے۔ اس لئے کسی ایک ماسک میں سے گزرنے والا ذرا غما (ق) حامل ہوتا ہے

$$\text{ق} = ۲ \text{ جم طہ} = ۲ \frac{\text{ج}^۲}{\text{ج}} \dots \dots \dots (۸)$$

مثال ۳۔ خط تدویر لا = لا (طہ + جب طہ) کا = لا (۱ - جم طہ) .... (۹)  
کے راس پر نیم قطر غما (س) دریافت کرو۔

$$\frac{\text{لا}^۲}{\text{کا}^۲} = \text{لا} (\text{طہ} + \text{جب طہ}) \div ۲ \text{ جب طہ} = \frac{\text{طہ}}{۲} = \text{لا} (۱ + \frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}) \div (\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}})$$

$$\text{اس سے سب} = \text{نہا} = \frac{\text{لا}^۲}{\text{کا}^۲} = ۱۳ \dots \dots \dots (۱۰)$$

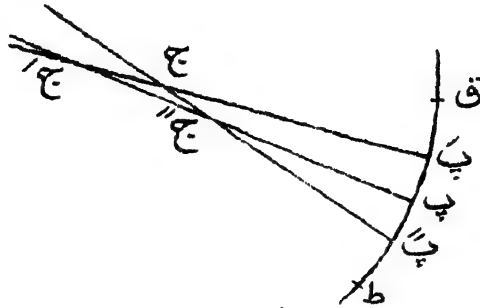
۱۳۷۔ لشمی دائرہ (Osculating circle)۔

انحنا پر بحث کرنے کا ذرا مختلف طریقہ ”لشمی دائرہ“ کے تعین پر مبنی ہے۔ اگر منحنی پر پ کے قریب دو نقطے ق اور ط ہوں جہاں ایک نقطہ پ کے ایک طرف واقع ہے اور دوسرا دوسری طرف تو دائرہ پ ق ط کے نیم قطری انتہائی قیمت پر ہم غور کرتے ہیں جبکہ ق اور ط دونوں پ کے لا انتہا قریب آ جاتے ہیں۔

اگر منحنی زیر بحث کا انحنا پ پر مسلسل ہو تو ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ دائرہ انتہائی ”دائرہ انحنا“ پر منطبق ہونا ہے کیونکہ اگر دائرہ پ ق ط کا مرکز ج ہو تو پ اور ق کے درمیان ایسا نقطہ پ ضرور ہوگا کہ ج پ معلومہ منحنی پر عماد ہو اور اسی طرح ایک نقطہ پ ق ط کے درمیان ایسا ہوگا کہ ج پ منحنی پر عماد ہو۔ فرض کرو کہ پ ج اور پ ج

یہ شرط ضروری ہیں لیکن اس ثبوت میں سہولت پیدا ہوتی ہے اور ذمہ معمولی شرطیں اس سے بڑی ہوتی ہیں۔

نقطہ پ کے عماد سے بالترتیب ج اور ج پر ملتے ہیں۔ شرط مذکورہ بالا کی رو سے



شکل (۱۱۲)

ج اور ج آخر الامر پ پر کے مرکز انحنایہ منطبق ہوں گے اور چونکہ ج ج اور ج ج اس لئے ج بوجہ مستحکمہ آخر الامر اس نقطہ پر منطبق ہوگا۔

چونکہ انتہا سے پہلے، دائرہ پ ق ط دے ہوئے منحنی کو پ کی پروس میں متن دفعہ عبور کرتا ہے اس سے معلوم ہوتا ہے کہ لٹمی دائرہ عام طور پر منحنی کو نقطہ تماس پر عبور کرے گا، دیکھو شکل ۱۱۲ صفحہ (۴۷۹)۔

اگر شکل ام حصہ اول صفحہ (۲۱۰) میں ق نقاط پ، ق، پ میں سے

$$\frac{پ}{ق} = ع \quad ع = \frac{پ}{ق}$$

اس لئے منحنی ما = فہ (۱۱) کے اس دتر انحنایہ کے لئے جو محور ما کے متوازی ہے

$$\frac{۱}{ق} = \frac{نسا}{پ} = \frac{ق}{ع} = \frac{نہا}{ع} = \frac{ق}{ع} \quad \text{جم سسا} = \frac{۱}{۴} \quad \text{فہ (۱۱) جم سسا}$$

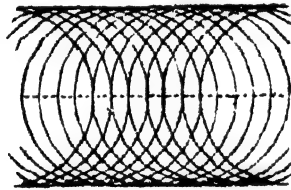
جیسار دفعہ ۱۳۶ (۲) میں ثابت کیا گیا۔

مثال۔ اگر شکل ۱۱۰ میں دائرہ پ ق ط، پ ص سے ع پر ملے تو

$$ق ص \times ط = پ ص \times ص ع \quad \text{اور اس لئے ص ع} = ع = ۴ \quad \text{پ ص}$$

اس سے معلوم ہوا کہ انحنایہ کا وتر قطع مکانی کے محور کے متوازی ۴ ص پ ہے۔ اسی طرح کا استدلال قطع ناقص کی صورت میں، مرکز میں سے گزرنے والا دتر انحنایہ دریافت کر سکتے ہیں۔

استعمال ہو سکتا ہے۔  
 ۱۳۸۔ لفاف - فرض کرو کہ منحنیات کا ایک واحد لافناہی نظام یا قبیل ہے اور اس قبیل کے الگ الگ منحنی ایک مستقل کو جو قبیل کی تخصیص کرتا ہے مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔  
 نظام کے کوئی دو منحنی بالعموم ایک دوسرے کو قطع کریں گے لیکن یہاں ہم بالخصوص نقاط تقاطع کے انتہائی مقامات پر بحث کریں گے جبکہ مستقل لایا جائے نظام کا تبدیل (parameter) بھی کہتے ہیں [اس تبدیلی لا انتہا کم ہو جب ہم ایک منحنی سے دوسرے منحنی تک جائیں۔ اس طرح عام طور پر ایک یا زیادہ انتہائی نقاط تقاطع ہر ایک منحنی پر ہوں گے جہاں پر یہ ساتھ کے منحنی کو کاٹتا ہے۔ ان انتہائی نقاط تقاطع کا طریق نظام کا "لفاف" کہلاتا ہے مثال ۱۔ معلوم نصف قطر کے دائروں کا ایک نظام ہے، ان کے مرکز ایک دے ہوئے خط مستقیم پر واقع ہیں۔ اس جگہ تبدیل مرکز کا محدود ہے۔



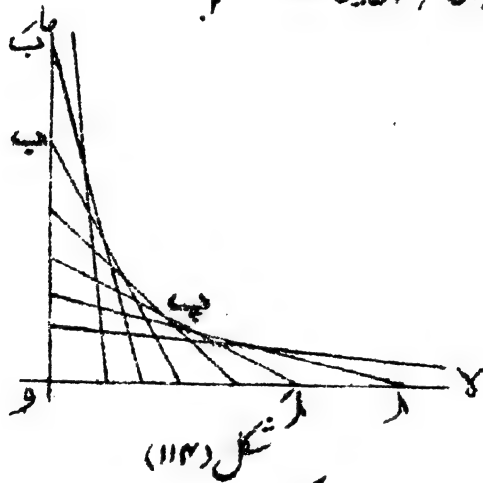
شکل (۱۱۳)

اگر نظام کے دو دائروں کے مرکز ج، ج' ہوں تو ان کے نقاط تقاطع کو ملانے والا خط ج ج' کی علی القواکیم تنصیف کرتا ہے۔ اس لئے کسی دائرہ کے انتہائی نقاط تقاطع ساتھ کے دائرہ کے ساتھ اس قطر کے سرے ہیں جو مرکزوں کے ملانے والے خط پر علی القواکیم ہے۔ اس لئے لفاف دو خطوط مستقیم پر مشتمل ہے جو مرکزوں کے ملانے والے خط کے متوازی ہیں اور اس سے معلوم نیم قطر کے فاصلہ پر واقع ہیں۔

۳۲۳

مثال ۲۔ ایک خط مستقیم ہے جو محور کے ساتھ ملے مستقل رقبہ (م) کا مثلث بناتا ہے۔ خط کے دو محل 'ا ب'، 'ا ب' ہوں جو پ قطع کرتے ہیں

ثلث  $\Delta PQR$  مساوی ہیں اس لئے  
 $PQ = PR$   $\Delta PQR$  میں  $PQ = PR$   
 اس لئے آخر الامر جب  $\Delta PQR$  انتہا چھوٹا ہو تو  $PQ$  کا وسطی نقطہ ہو گا۔ اگر  $(P, Q, R)$   
 نقطہ  $P$  کے محدد ہوں اور محوروں کا درمیانی زاویہ مساوی ہو تو  
 $\angle PQR = \angle PRQ$   $\Delta PQR$  میں  $PQ = PR$  اس لئے  
 $\angle PQR = \angle PRQ$   $\Delta PQR$  میں  $PQ = PR$   
 اس لئے لفاف قطع زائد ہے جس کے تقارب حوالہ کے محدد ہیں۔ شکل ۱۱۴ سے اس  
 صورت کی توضیح ہوتی ہے جس میں  $\frac{PQ}{PR} = \frac{PQ}{PR}$



#### ۱۳۴۔ لفاف دریافت کرنیکا عام طریقہ۔

فرض کرو کہ نظام کے کسی منحنی کی مساوات ہے

(۱) .....  $y = f(x)$   $\Delta PQR$  میں  $PQ = PR$   
 جہاں  $\Delta PQR$  متبدل ہے۔ جن نقطوں پر یہ نظام کے دوسرے منحنی

(۲) .....  $y = g(x)$   $\Delta PQR$  میں  $PQ = PR$   
 کو قطع کرتا ہے ان نقاط پر صریحاً

(۳) .....  $y = h(x)$   $\Delta PQR$  میں  $PQ = PR$

جب تغیر عہ۔ لا انتہا کم ہو تو یہ آخری مساوات یہ شکل اختیار کرتی ہے

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف عہ}} \text{ فہ (لا، ما، عہ) } = 0 \dots (۴)$$

۳۲۵ جہاں  $\frac{\text{جف}}{\text{جف عہ}}$  بلحاظ عہ کے جزوی تفرق کی علامت ہے دیکھو دفعہ ۳۴

۱۔ انتہائی تقاطع کے نقطہ یا نقاط کے محدود (۱) اور (۴) کو بطور ہمزاد مساواتوں کے مل کرنے سے حاصل ہوتے ہیں اور انتہائی نقاط تقاطع کا طریق ان مساواتوں سے عہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ دفعہ ۱۳۰ مثال ۱ کے دائرے اس مساوات سے تغیر ہوتے ہیں  
(لا - عہ) + ما = لا ..... (۵)  
بلحاظ عہ کے تفرق کرنے سے

(لا - عہ) = 0 ..... (۶)  
(۵) اور (۶) کے درمیان عہ ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \pm 1 \dots (۷)$$

جو مطلوبہ لغاف ہے۔

مثال ۲۔ اگر زمرہ مبدا سے زاوی ارتفاع طہ پر ایسی رفتار سے پھینکا جائے جو بلندی ب کی وجہ سے ہے تو مکانی راستہ کی مساوات ہے

$$\text{ما} = \text{لا سس طہ} - \frac{1}{\text{ب}} \frac{\text{لا}^2}{\text{ب}} \text{ قسط طہ} \dots (۸)$$

جہاں لا، ما کے محور بالترتیب افقی اور انحنائی ہیں۔ سس طہ کی بجائے عہ کہنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \text{عہ لا} - \frac{1}{\text{ب}} \frac{\text{لا}^2}{\text{ب}} (1 + \text{عہ}) \dots (۹)$$

مختلف ارتفاعوں یعنی عہ کی مختلف قیمتوں کے لئے راستوں کا لغاف معلوم کر نیکی ہم بلحاظ عہ کے (۹) کو تفرق کرتے ہیں اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(۱۰) \dots\dots\dots \frac{۱}{۲} = \frac{ع}{ب} = (۱۰)$$

یہ مساوات پوری ہوتی ہے لا = ۱ یا ع = لا = ۲ ب سے پہلی مساوات سے حاصل ہوتا ہے ما = اور اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مبدأ طریق کا ایک حصہ ہے اور یہ ایسے بھی ظاہر ہے۔ دوسرے نتیجے سے عہ ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(۱۱) \dots\dots\dots (ب - ما) = ۴ ب = لا$$

یہ ایک قطع مکانی ہے جس کا محور اتصالی ہے اس کا اسکہ مبدأ ہے اور اس کا رأس بلندی ب پر ہے۔

۱۲۰۔ جبر یہ طریقہ - اگر مساوات

$$(۱) \dots\dots\dots (لا، ما، ع) = ۰$$

۳۴۶ میں فہ، عہ کا منطق صحیح تفاعل ہو تو گزشتہ دفعہ کے قاعدہ کی اور طرح سے بھی تحقیق ہو سکتی ہے۔ اگر لا، ما کو کوئی خاص قیمتیں دیجائیں تو مساوات سے عہ معلوم ہوتا ہے، یعنی اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ نظام کے کونسے منحنی دے ہوئے نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں۔ اگر مساوات بلحاظ عہ کے ن ویں درجہ کی ہو تو ان منحنیات (حقیقی یا خیالی) کی تعداد ن ہوگی اور بالعموم یہ ن منحنی مختلف ہوں گے۔ لیکن اگر نقطہ زیر بحث دو متصل منحنیوں کا اتصالی نقطہ تقاطع ہو تو عہ کی دو قیمتیں منطبق ہوں گی۔ دفعہ ۵۰ میں یہ ثابت کیا گیا تھا کہ عہ میں مساوات کی دوسری اہل کے لئے شرط یہ ہے

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{جف}{جہ} = (لا، ما، ع) = ۰$$

۳۳ تارخی نقطہ نظر سے یہ مسئلہ دلچسپ ہے کیونکہ یہ پہلی مثال ہے جس میں منحنی خطوط کے قبیل کا لفاف حاصل کیا گیا (برنولی) لفاف دریافت کرنے کا عام طریقہ لب لبب نہیں کی ایجاد معلوم ہوتا ہے۔

اس لئے حسب سابق انتہائی تقاطع (۱) اور (۲) کو ہمزاد مساواتوں کے طور پر حل کرنے سے حاصل ہونے ہیں اور لفاف ان مساواتوں سے حل کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر مساوات (۱) میں درجہ اول کی مساوات ہو تو نظام کا صر ایک منحنی نقطہ معلومہ میں سے گذرتا ہے اور اس صورت میں لفاف نہیں ہو سکتا۔ اس کی مثالیں متوازی خطوط اور ہم مرکز دائرے ہیں۔ مثلاً

$$ل = لا + م = عا \dots \dots \dots (۳)$$

$$(۴) \dots \dots \dots لا + م = عا$$

اگر (۱) درجہ دوم کی مساوات ہو مثلاً

$$پ = عا + ۲ ق = عا + ر = ۰ \dots \dots \dots (۵)$$

جہاں پ، ق، ر متغیروں لا، م کے معلومہ تفاعل ہیں تو مساوی اصلوں کے لئے شرط ہے

$$(۶) \dots \dots \dots پ = ر = ق$$

اس لئے یہ لفاف کی مساوات ہے۔

$$مثال ۱ - خط مستقیم \frac{لا}{عا} + \frac{ما}{بہ} = ۱ \dots \dots \dots (۷)$$

حوالہ کے محور کے ساتھ ملکر مستقل رقبہ (م) کا مثلث قطع کرتا ہے۔ اس لئے

$$(۸) \dots \dots \dots عا بہ = م = ۲ م$$

جہاں مہر محوروں کا میلان ہے۔ بہا کو ساقط کرنے سے متغیر خط کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$(۹) \dots \dots \dots عا + ۲ م = ۲ م + لا = ۰$$

اس امر کو بیان کرنے سے کہ یہ مساوات لمحاظ عا کے مساوی اعلیں کرتی ہے ہمیں لفاف کی مساوات یہ حاصل ہوتی ہے

$$(۱۰) \dots \dots \dots لا + ۲ م = م$$

جیسا کہ دفعہ ۳۸ مثال ۲ میں حاصل کیا گیا۔

مثال ۲ - زاویہ قائمہ کی ایک ٹانگ ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتی ہے اور ۳۴۷  
 رأس ایک ثابت خط مستقیم میں گزرتا ہے، دوسری ٹانگ کا لفاف مطلوب ہے۔  
 اگر ثابت خط مستقیم محور صاف ہو اور ثابت نقطہ (۱) تو دوسری ٹانگ کی مساوات  
 باسانی حاصل ہوتی ہے

$$ما = م لا + \frac{د}{م} \dots\dots\dots (۱۱)$$

جہاں م محور لا کے ساتھ زاویہ میلان کا ماس ہے۔ اس مساوات کو اس شکل میں  
 لکھیں  
 ہم دیکھتے ہیں کہ لفاف قطع مکانی ہے

$$ما^۲ = ۲ لا لا \dots\dots\dots (۱۲)$$

۱۴۱ - لفافوں کی تماسی خاصیت - اوپر کی مثالوں سے

طالب علم ذیل کے مسئلہ کے ادراک کے لئے تیار ہو چکا ہو گا۔  
 منحنیات کے کسی نظام کا لفاف (بالعموم) اپنے ہر نقطہ پر نظام کے متناظر  
 منحنی کو مس کرتا ہے۔

$$مساواتوں \quad ف (لا، ما، عا) = \dots\dots\dots (۱)$$

$$اور \quad \frac{جف}{جف عا} \quad ف (لا، ما، عا) = \dots\dots\dots (۲)$$

سے لا، ما بطور عا کے تفاعل کے حاصل ہوتے ہیں، فرض کر دو کہ

$$لا = فار عا \quad ما = ف (عا) \dots\dots\dots (۳)$$

اور مساواتوں (۳) سے لفاف کی تعین ہوتی ہے۔ اگر (۳) سے لا، ما کی  
 قیمتیں مساوات (۱) کے دائیں رکن میں درج کی جائیں تو عا کا ایک تفاعل  
 حاصل ہوگا جو شائبہ صفر ہوگا اور اس تفاعل کو بلحاظ عا کے تفرق کرنے سے  
 جو نتیجہ حاصل ہوگا وہ بھی صفر ہوگا، اس لئے دفعہ ۵۹ (آ) کے قاعدہ کی  
 رو سے لازماً



$$(۴) \quad \frac{\text{جف فہ فرلا}}{\text{جف لا فرعہ}} + \frac{\text{جف فہ فرما}}{\text{جف ما فرعہ}} + \frac{\text{جف فہ فرعہ}}{\text{جف عہ فرعہ}} \times \frac{\text{فرعہ}}{\text{فرعہ}} = \dots$$

اور (۲) کی رو سے یہ ربط ہو جاتا ہے

$$(۵) \quad \frac{\text{جف فہ فرلا}}{\text{جف لا فرعہ}} + \frac{\text{جف فہ فرما}}{\text{جف ما فرعہ}} = \dots$$

$$(۶) \quad \dots = \frac{\frac{\text{فرما}}{\text{فرعہ}}}{\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} - \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}}$$

دفعہ ۶۱ کی رو سے اس مساوات کا دایاں رکن لفاف کے لئے فرما کی

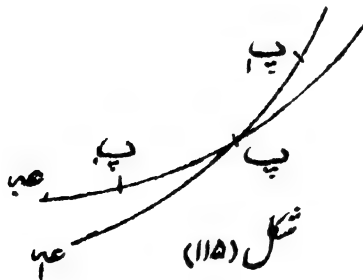
قیمت ہے اور دفعہ ۵۹ (۱۰) کی رو سے بایاں رکن منحنی (۱) کے لئے فرما کی

قیمت کو تعبیر کرتا ہے اس سے معلوم ہوا کہ انتہائی نقطہ تقاطع پر منحنی (۱) اور لفاف کا تماس وہی ہے۔

۳۴۸

اس مسئلہ کا ہندی پہلو یوں واضح ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ شکل میں متبادل عہ کی قیمتوں عہ، عہ کے جواب میں نظام کے دو منحنیات کے کچھ حصے دکھائے گئے ہیں اور یہ منحنی ایک دوسرے کو پیر قطع کرتے ہیں۔



فرض کرو کہ 'پ' لفاف پر کے متناظر نقطے ہیں یعنی 'پ' کا انتہائی مقام ہے جبکہ 'ع' کو قائم رکھ کے 'ع' کو 'ع' کے لا انتہا قریب لیا جاتا ہے اور 'پ' کا انتہائی مقام ہے جبکہ 'ع' کو ثابت رکھ کر 'ع' کو 'ع' کے لا انتہا قریب لیا جاتا ہے۔ چونکہ 'ع' کے یہ تغیر متقابل رخوں میں ہیں اور چونکہ 'پ' کے محدود عام طور پر 'ع' کے متشاکل تفاعل ہوتے ہیں، اس لئے 'پ' کے متناظر ہٹاؤ 'پ' اور 'پ' عام طور پر تقریباً متقابل سمتوں میں ہونگے (جبکہ | عہ - عہ | بہت چھوٹا ہو) اور 'پ' 'پ' بڑے منفرجہ زاویہ والا مثلث ہوگا۔ اس لئے آخر الامر جب | عہ - عہ | لا انتہا چھوٹا ہو تو وتر 'پ' اور 'پ' سمت میں منطبق ہوں گے یعنی لفاف کا ماس معنی کے ماس پر منطبق ہوگا۔ بعض صورتوں میں اوپر کی تحقیق درست نہیں رہتی۔ جہاں تک تحلیلی ثبوت کا تعلق ہے یہ ظاہر ہے کہ (۵) سے کوئی نتیجہ مستنبط نہیں ہو سکتا جبکہ نقطہ زیر بحث پر ایک ساتھ

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} = \dots \dots \dots (۷)$$

یعنی جبکہ معنی (۱) کے لئے  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  کی قیمت یگانہ طور پر معین نہ ہو سکے۔ یہ خصوصیت ایک "نادر نقطہ" پر پیدا ہوتی ہے خواہ اپنی نوعیت کے لحاظ سے یہ عقدہ ہو یا قرن یا اکیلا نقطہ (دیکھو دفعہ ۱۱۹)۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ قبیل کے نادر نقطوں کا طریق 'اگر ایسے طریق کا وجود ہو' (۱) اور (۲) کے درمیان 'ع' کے حامل انقاط میں شریک ہو گا لیکن یہ طریق عام طور پر دئے ہوئے متعینوں کو صحیح معنوں میں "مس" نہیں کرتا۔ اس امر کی پوری تحقیق اس کتاب کے حدود سے باہر ہے لیکن ایک سادہ سی مثال یہاں دی جاتی ہے

تفرق سادات کی کتابوں میں یہ بحث "نادر مل" کے باب کی ضمن میں ملے گی۔

ذیل کے قبیل پر غور کرو۔

(۸) (ا) (ما - عا) = <sup>۲</sup> لا (لا + ب) ..... (۸)  
دفعہ ۱۱۹ سے ظاہر ہے کہ نقطہ (۰، عا) پر عقدہ ہے، قرن ہے یا اکبلا نقطہ  
ہے بموجب اسکے کہ ب مثبت ہے، صفر ہے یا منفی۔ لفاف معلوم کریں گے  
عمل سے حاصل ہوتا ہے ما - عا = ۰، اس لئے

۳۴۹

(۹) لا (لا + ب) = ۰ .....  
خط لا = ۰ سے نادر تقاطع کا طریق حاصل ہوتا ہے جو اصلی منحنیوں کو مس  
نہیں کرتا۔ بخلاف اس کے خط لا = ۰ ب مس کرتا ہے (اگر ب صفر نہ ہو)  
ہندسی بحث میں یہ مان لیا گیا تھا کہ پ کے عین پڑوس میں منحنيات  
عا، عا، کا کوئی اور تقاطع نہیں ہے۔ عقدہ کی صورت میں عام طور پر دو  
متصل تقاطع ہونگے جن کے لا، محدود (مثلاً) بالترتیب ان خطوں کے  
ہونگے ف (عا، عا) اور ف (عا، عا) نیکن ف (عا، عا)  
متبدلوں عا، عا کا متشاکل تفاعل نہیں ہے اس لئے یہ استدلال  
عقدوں کے طریق پر عام نہیں ہوتا۔ نیز قرن کی صورت میں عا یا عا  
کلا انتہا چھوٹے تغیر کی وجہ سے نقطہ پ کا ہٹاؤ مثل ۱۱۵ میں رتبہ اول کا  
نہیں ہوگا اور عام طور پر نقطے پ اور پ دونوں پ کے ایک ہی  
جانب ہونے ہیں۔ اکیلے نقطہ کی پڑوس میں متصل منحنيات کا کوئی حقیقی تقاطع  
نہیں ہوتا۔

۱۲۲۔ برچہ پنجم۔ منحنی کا برچہ (Evolute) اس کے

مرکز انحناء کا طریق ہوتا ہے اور چونکہ مرکز انحناء (دفعہ ۱۳۳) دو متصل عمادوں کا  
نقطہ تقاطع ہے اس لئے برچہ دئے ہوئے منحنی کے عمادوں کا لفاف ہے۔  
اسلئے ابتدائی منحنی کے عماد برچہ پنجم کے تماس ہوتے ہیں۔

\* ظاہر ہے کہ دفعہ ۱۴ کے آفریکی مستثنیٰ صوتیں خط مستقیم کے لفاف میں پیدا نہیں ہوتیں۔

- مثال ۱- قطع مکانی  $\text{ما} = ۴$  و  $\text{لا} = ۱۲$  ..... (۱)  
 میں  $\text{لا} = ۱۲$  و  $\text{جم سا} = ۴$  ..... (۲)  
 اور (دفعہ ۳۴ مثال ۴) سے

(۳) .....  $\text{ما} = ۱۲ - \text{جب سا}$

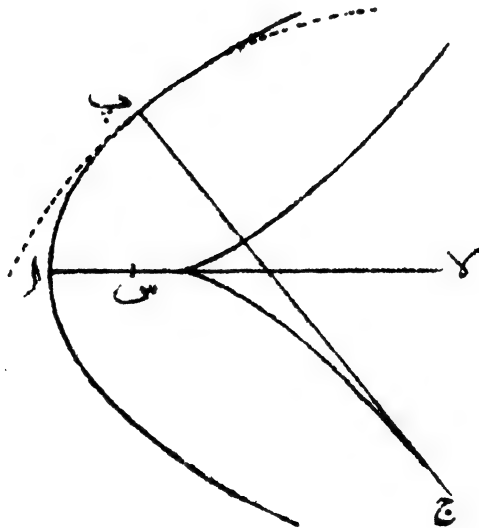
اس لئے انہما کے مرکز کے محدود ہیں

(۴) ..... 
$$\begin{cases} \text{ضا} = \text{لا} - \text{س جب سا} = ۳ + ۱۲ = ۱۵ \\ \text{عا} = \text{ما} + \text{س جم سا} = \frac{۴}{۱۲} - \frac{۴}{۱۲} \end{cases}$$

اس لئے  $\text{عا} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۴}{۱۲}$  (ضا - ۱۲) / ۴

- پس پچھ نیم کبی مکانی ہے و  $\text{ما} = \frac{۴}{۱۲} (۱۲ - ۱۲) = ۰$  ..... (۵)

۳۵۰



شکل (۱۱۶)

بطرز دیگر۔ مخروطات کی کتابوں میں یہ ثابت کیا جاتا ہے کہ عماد کی مساوات کی یہ شکل

$$ما = م (لا - ۱۲) - ۱ م^۳ \dots \dots \dots (۶)$$

اس کالاف معلوم کر نیکے لئے بلحاظ م کے جزوی تفرق نو اور حاصل کرو

$$لا - ۱۲ = ۱۲ = ۱ م^۳ ، ما = ۱۲ = ۱ م^۳ \dots \dots \dots (۷)$$

م کے ساتھ کرنے سے نتیجہ (۵) حاصل ہوتا ہے۔ منحنی شکل ۱۱۴ میں دکھایا گیا ہے۔

مثال ۲۔ ناقص (لا = ۱۲) جم فدا، ما = ب جب فدا۔ (۸) کے کسی نقطہ پر عماد ہے

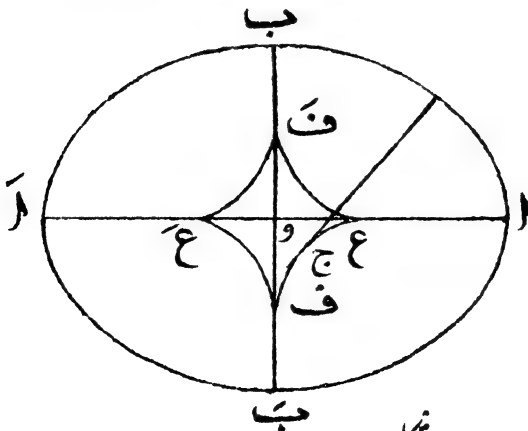
$$۱ لا - \frac{ب ما}{جم فدا} = ۱۲ - ب^۳ \dots \dots \dots (۹)$$

بلحاظ فدا کے تفرق کرنے سے

$$۱ لا - \frac{ب ما}{جم فدا} = ۱۲ (فرض کرو) \dots \dots \dots (۱۰)$$

(۹) میں درج کرنے سے  $۱۲ = ۱۲ - ب^۳ \dots \dots \dots (۱۱)$  اس لئے مرکز انحناء کے محدود ہیں

$$لا = ۱۲ - ب^۳ جم فدا، ما = ۱۲ - ب^۳ جب فدا \dots \dots \dots (۱۲)$$



شکل (۱۱۴)

اور برہمچہ ہے (۱۱۸) + (ب با) = (و - ب) ..... (۱۳) ۳۵۱

یہ منحنی جو ستارہ نما سے قائم ظل کے ذریعہ حاصل ہو سکتا ہے شکل ۱۱۸ میں دکھایا گیا ہے۔ نقاط 'ا' ب' 'ر' 'ب' پر انحناء کے مرکز بالترتیب ہیں

ع، ف، ع، ف

مثال ۳۔ خط تدویر کا برہمچہ دریافت کرو۔

خط تدویر 'ا' پ (شکل ۱۱۸) کے کسی نقطہ پ پر دفعہ ۴۳ مثال ۲ کی رو سے

۴ = ۲ پ سے ..... (۱۴)

محور 'ا' ب کو 'د' تک اتنا بڑھاؤ کہ 'ب' 'د' = 'ا' ب اور 'ت' سے کبڑ بڑا کر یہ 'د' میں سے گزرنیوالے 'ب' سے کے متوازی خط سے سے پر ملے۔

سے سے کے قطر پر دائرہ کھینچو اور پ سے کو اتنا بڑھاؤ کہ دائرہ کے محیط سے یہ پ پر ملے تو پ سے = پ سے 'پس پ' خط تدویر کے نقطہ پ پر

مرکز انحناء ہے۔ چونکہ قوس پ سے سے قوس 'ت' پ کے مساوی ہے اور اس لئے

ب سے اور 'د' سے کے مساوی ہے اس لئے پ کا طریق صریحاً ایک خط تدویر

ہے جس کا کون دائرہ سے پ سے سے ہے جو 'د' سے کے نیچے پہلو پر لڑکتا ہے اور

مرسم نقطہ 'د' سے لڑکتا شروع ہوتا ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ خط تدویر کا برہمچہ

ایک مساوی خط تدویر ہے اور اس کا قرن 'د' پر ہے۔

نیز دفعہ ۱۲۲ (۴) سے ظاہر ہے کہ تدویری قوس

پ = د = ۲ پ = پ

اس لئے قوس 'د' پ + پ پ = مستقل ..... (۱۵)

اس لئے شکل ۱۱۸ کی پچھلی تدویر اوپر کی تدویر کا برہمچہ (دفعہ ۱۴۴) ہے

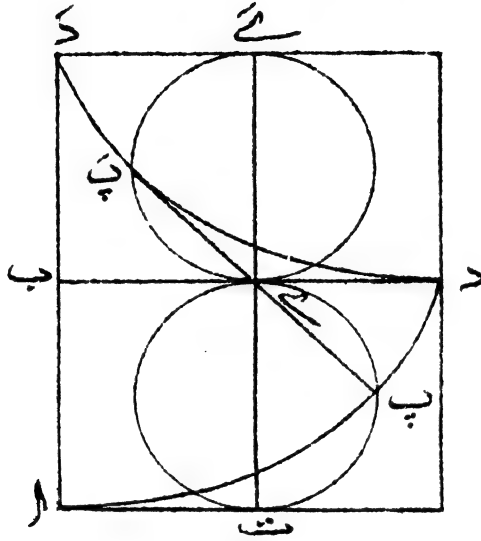
جب کبھی ایک منحنی کی مساوات ع اور سہ کے رشتے سے تعین ہو سکے مثلاً

\* یہ مثال تدویری رفاص کے نظریہ کی ضمن میں تاریخی نقطہ نظر سے شہور ہے۔ یہ نتائج ہائیگن (Huyghens ۱۶۷۳) کے ساتھ منسوب ہیں۔

ع = ف (سا) ..... (۱۶)

تو برہمچرہ اس مساوات

ع = ف (سا) ..... (۱۷)



شکل (۱۸)

سے حاصل ہوگا بشرطیکہ (۱۷) میں یہ فرض کر لیا جائے کہ سا کا مبدأ ایک قائمہ میں سے آگے کو نہادیا گیا ہے۔ شکل ۱۰۸ صفحہ (۴۶۲) کے حوالہ سے یہ بالکل واضح

ہوگا کیونکہ برہمچرہ کے ماس پر مبدأ سے عمود و ع = پ = ع = فرسما جبکہ

اصل منحنی کے رموز استعمال کئے جائیں۔

مثال ۴۔ بریاضۃ دیر کا برہمچرہ دریافت کرو۔

شکل ۱۸ صفحہ (۴۰۷) میں اگر و سے ت پ پر جو برتہ دیر کا نقطہ پ پر ماس

سے عمود ع نکالا جائے تو

$$ع = و ت جم پ مے ج = (و + ب) جم \frac{ف}{۲}$$

یا  $E = (1+2B) \text{ جم } \frac{1}{1+2B} \text{ سا} \dots\dots\dots (18)$

اگر سا کا مبداء ائس کی بجائے قرن کے جواب میں ہوتو زاویہ کی جیب تمام کی بجائے جیب رکھنا ہوگی۔  
اس لئے پرچہ کی صورت میں

$E = -1 \text{ جب } \frac{1}{1+2B} \text{ سا} \dots\dots\dots (19)$

جسے سا کے مبداء کی درستی سے (۱۸) کی شکل میں لایا جاسکتا ہے۔ اس لئے ۳۵۳  
معلوم ہوا کہ پرچہ متشاکل برتدویر ہے جس کے ابعاد اس نسبت  $\frac{1}{1+2B}$  سے  
کم کر دئے گئے ہیں۔  
درتدویر کے لئے صرف B کی علامت کو بدل دینا ہے۔

۱۴۳۔ پرچہ کی قوس۔ کسی منحنی کے کسی دو نقطوں پر

انحناء کے نیم قطروں کا فرق پرچہ کے متناظر نقطوں کے درمیان کی قوس  
کے مساوی ہے۔

اس کے ثابت کرنے کے لئے فرض کرو کہ منحنی کے دو متصل نقطوں P اور  
P کے عماد ایک دوسرے سے ج پر ملتے ہیں، اور ج اور ج متناظر

نقطوں کے بعد معلوم ہوتا ہے کہ مساوات  $E = \text{جم } M \text{ سا یا } E = \text{ج جب } M \text{ سا}$   
بالترتیب مدبر یا درتدویر کو تعبیر کرتی ہے بموجب اسکے کہ  $M > 1$  بشرطیکہ دفعہ ۲۳ کی  
تعریف کے مطابق گروتدویروں کو برتدویروں میں شامل کر لیا جائے۔

لہذا مرکز کے مدبر یا درتدویر کا پائس منحنی خاص طسز کا بروہیہ ہے

جس کی طرف دفعہ ۱۲۵ مثال ۲ میں اشارہ کیا گیا ہے شکل ۹۲ چار





کے تفرق سے

$$\frac{\text{فرضا}}{\text{فرس}} = - \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} \text{ جب سا، فرعا} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} \text{ جم سا... (۴) } \quad ۳۵۲$$

کیونکہ  $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \text{جم سا} = \frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} = \text{جب سا} = \frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} = \frac{۱}{۱}$

اس لئے  $\frac{\text{فرعا}}{\text{فرضا}} = - \text{مم سا} \dots \dots \dots (۵)$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ برہمچہ کا ماس ابتدائی منحنی کا عماد ہے اور

$$\frac{\text{فرصہ}}{\text{فرس}} = \left\{ \left( \frac{\text{فرضا}}{\text{فرس}} \right)^2 + \left( \frac{\text{فرعا}}{\text{فرس}} \right)^2 \right\} = \frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} \dots (۶)$$

تمکمل کرنے پر اس سے نتیجہ (۲) حاصل ہوتا ہے۔

خط تدریج کی صورت میں یہ خاصیت اس سے قبل دفعہ ۱۴۲ (۱۵) میں حاصل کی گئی ہے۔

اوپر کے مسئلہ سے یہ ایک عجیب نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ منحنی کے متصل نقطوں کے انحناء کے دائرے عام طور پر ایک دوسرے کو قطع نہیں کرتے۔ اسکی وجہ یہ ہے۔ مرکزوں کے درمیان کا فاصلہ برہمچہ کا وتر ہے اور اسلئے عام طور پر متناظر قوس سے کم ہوتا ہے یعنی نیم قطروں کے فرق سے کم رہتا ہے۔ نیز اگر منحنی کی ذاتی مساوات یہ ہو

$$\text{مس} = \text{ف (سا)} \dots \dots \dots (۷)$$

$$\text{تو صہ} = \text{س} + \text{م} = \text{ف (سا)} + \text{م} \dots \dots \dots (۸)$$

اگر سا کا مبدأ بقدر ایک قائمہ کے بدل دیا جائے تو یہ برہمچہ کی ذاتی مساوات ہوگی۔ جمع کیا ہوا مستقل حذف کر دیا جاسکتا ہے اگر صہ کے مبدأ کا مناسب انتخاب کیا جائے۔

مثال ۱۔ قطع ناقص کے محور ا و ب ہیں۔ ان محوروں کے سروں پر نیم قطر انحناء بالترتیب  $\frac{ب}{و}$  اور  $\frac{ا}{ب}$  ہیں، اس لئے جن چار حصوں میں برہمچہ کے قرن

اسے تقسیم کرتے ہیں (شکل ۱۱۷) ان میں سے کسی ایک کا طول ہے

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2 - b^2}{ab}$$

مثال ۲ - خط دو پر کی ذاتی مساوات ہے

مس = گ جب مسا ..... (۹)

اور دریچہ کی مساوات ہے

صہ = گ جم مسا ..... (۱۰)

اس لئے دریچہ مساوی خط دو پر ہے جیسا کہ پہلے ثابت کیا گیا۔

۱۴۴ - دریچے اور متوازی منحنی - اگر منحنی (۱) ایک منحنی ب کا دریچہ

ہو تو ب (۱) کا ایک دریچہ (Involute) ہوگا۔

(۱) ایک دریچہ اس لئے کہ کسی ایک منحنی کے بشمار دریچے ہوتے ہیں۔ کسی منحنی کا دریچہ اس طرح معلوم ہو سکتا ہے کہ منحنی پر ثابت نقطہ و لو اور اس کے کسی نقطہ نقطہ پ پر کے ماس کی سمت میں و سے پرے طول پ ق اتنا پلو کہ

توس و پ + پ ق = مستقل ..... (۱)

دفعہ ۱۴۳ کے استدلال کو اٹھنے سے یہ باسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ دے

۳۵۵

ہوئے منحنی کے ماس ق کے طریق کے عماد ہیں، اس سے معلوم ہوا کہ یہ طریق دریچہ کی تعریف بالا کو بورا کرتا ہے۔ "مستقل" کو بدلنے سے ایک ہی منحنی کے کئی دریچے حاصل ہوتے ہیں۔

عملی مثال کے طور پر ایسا خیال کرو کہ معلومہ شکل کی کسی مادی قوس پر ایک ناگاہیٹ دیا گیا ہے اور اسی کا ایک سر منحنی کے ایک ثابت نقطہ سے بندھا ہوا ہے۔ رسی کے آزاد حصہ پر کا کوئی نقطہ جو منحنی میں مضم کرتا ہے وہ دریچہ منحنی ہے۔ دراصل اس نام کی یہی وجہ تسمیہ ہے۔

مثال ۱ - خط خسری زنجیرہ کا دریچہ ہے۔ دفعہ ۱۲۰ -

مثال ۲۔ نیم قطر کا دائرہ ہے، اس کے دریچہ میں صریحا

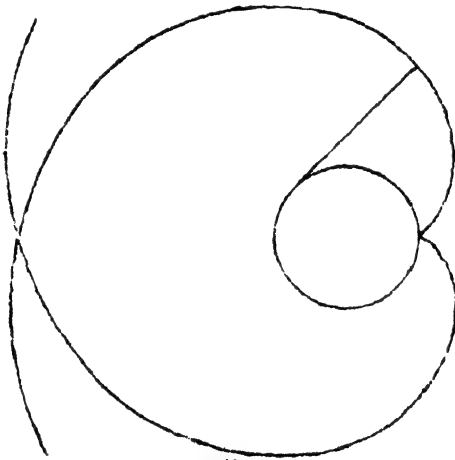
$$\text{فرس} = \text{س} = \text{و سا} \dots \dots \dots (۲)$$

اگر سا کے مبداء کا مناسب طور پر انتخاب کیا جائے۔ اسلئے مکمل کرنے سے

$$\text{س} = \frac{1}{4} \text{و سا} \dots \dots \dots (۳)$$

کسی مستقل کا اضافہ کرنے کی ضرورت نہیں ہے اگر س کو قرن (سا = ۰) سے  
ناپنا شروع کیا جائے۔

(دائرہ کی) اس خاص صورت میں ظاہر ہے کہ تمام دریچے متطابق طور پر مساوی  
اس لئے عام ذکر میں محض دائرہ کا دریچہ کہتے ہیں۔ یہ منحنی شکل ۱۲۰ میں دکھایا گیا ہے

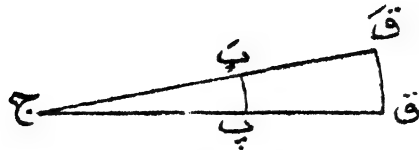


شکل (۱۲۰)

اگر کسی معلومہ منحنی کے عماد پر منحنی سے شروع ہو کر ایک مستقل طول ناپا جائے تو  
اس طرح جو نقطہ ملے گا اس کا طریق معلومہ منحنی کا "متوازی" کہلاتا ہے۔

اگر ج پ، ج پ، ج پ منحنی کے دو متصل عماد ہوں اور متوازی منحنی کے متناظر  
نقطے ق اور ق ہوں تو پ ق = پ ق

چونکہ ج پ اور ج پ کا فرق دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے اس لئے



شکل (۱۲۱)

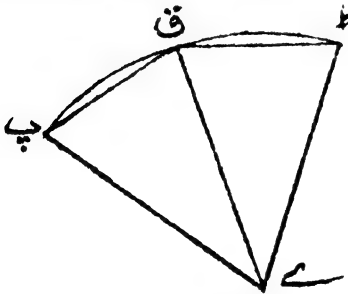
معلوم ہوتا ہے کہ ج ق اور ج ق کا فرق بھی ایسے ہی دوسرے رتبہ کی جھوٹی مقدار ہے اور اس لئے مثلث ج ق ق کے زاوے ق اور ق آخر الامر رائے قائم ہیں۔ اس لئے ج ق اور ج ق متوازی منحنی کے عماد ہیں۔ اس لئے دو متوازی منحنیات کے وہی عماد ہوتے ہیں اور وہی بنیمچہ دوسرے انفاذ میں متوازی منحنی ایک ہی منحنی کے درپے ہوتے ہیں۔

برعکس اسکے یہ ظاہر ہے کہ کسی منحنی کے مختلف درپے متوازی منحنیات کا ایک نظام بناتے ہیں۔

### ۱۴۵۔ متحرک شکل کا فوری مرکز۔ کوئی شکل ہے جسکی بناوٹ

میں تغیر واقع نہیں ہوتا، اپنی سطح میں ایسی شکل کی انتقائیت یا (ہٹاؤ) کا نظریہ شیک طور پر حرکیات سے متعلق ہے، لیکن اسکے چند مہندسی استعمال دلچسپ ہیں۔

اس نظریہ کا پہلا مسئلہ یہ ہے۔ ایسا کوئی ہٹاؤ ایک ایسے گھماؤ کے



شکل (۱۲۲)

معا دل ہے جو کسی محدود دیا لامحدود فاصلہ پر کے ایک نقطہ کے گرد وقوع پذیر ہوتا ہے۔ ذیل میں اس کا ایک نفوت دیج ہے۔ بنیے محل میں شکل کے کوئی دو نقطے (ا ب) ہیں دوسرے محل میں وہی دو نقطے

اے ایک پیریں کسی تیسرے نقطہ کا نیا مقام ہے جو ابتدا میں ہے پر تھا  
مثلاً ایک ب بنانے سے معلوم ہوتا ہے جو مثلث ایک ب کے  
بالکل متطابق ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ متحرک شکل کا مقام معین  
کرنیکے لئے صرف دو نقطوں کے مقامات کا تعین کافی ہے۔  
اے شکل کے کوئی سے نقطہ پر غور کرو فرض کرو کہ ایک ب اس کا ابتدائی  
اور ق آخری مقام ہے اور شکل کے اس نقطہ کا مقام ط ہے جو ابتدا میں  
ق پر تھا۔ چونکہ ایک ق اور ق ط ایک ہی خط کے دو محل ہیں اسلئے  
وہ باہم مساوی ہیں۔ اگر دائرہ ایک ق ط کا مرکز ہے ہو تو مثلث  
ب سے ط ق سے ط متطابق ہیں یعنی نقطہ سے دونوں محلوں  
میں وہی نقطہ ہے۔ اس لئے ہٹاؤ کے کے گرد گھماؤ کے معادل ہے  
اس نقطہ کو ”گھماؤ کا مرکز“ کہتے ہیں۔

۳۵۴

ایسا ہو سکتا ہے کہ ایک ق اور ق ط ایک ہی خط مستقیم میں ہوں  
ہٹاؤ ایسی صورت میں بغیر گھماؤ کے شکل کے محض نقل مکان کے معادل ہو  
یا دوسرے الفاظ میں یہ کہا جاسکتا ہے کہ گھماؤ کا مرکز لاتنا ہی پر ہے۔  
اس کے بعد کسی مستوی شکل کی مسلسل حرکت پر غور کرو جو صرف اس کے  
اپنے مستوی میں وقوع پذیر ہوتی ہے۔ شکل کے صرف دو متصل محلوں پر اپنی  
توجہ مجدد رکھو۔ پہلے محل سے دوسرے محل میں شکل کسی خاص مرکز کے گرد  
گھماؤ کے ذریعہ لائی جاسکتی ہے۔ اس نقطہ کا انتہائی محل جبکہ شکل کے دو مقام  
یا محل ایک دوسرے سے لا انتہا قریب ہوں ”نوری مرکز“ کہلاتا ہے۔  
اگر شکل کے ایک ہی نقطہ کے دو متصل محل ایک ب، ایک ہوں اور  
گھماؤ کا متناظر زاویہ صف ط ہے ہو تو گھماؤ کا مرکز (سے) ایسے خط مستقیم  
پر واقع ہوگا جو ایک ب کی علی القوائم تنصیف کرتا ہے اور زاویہ  
ب سے ب، صف ط کے مساوی ہوگا۔ اس لئے اگر سے سے  
محدود فاصلہ پر کوئی نقطہ ب ہو تو اس کا لا انتہا جھوٹا ہٹاؤ آخر الامر سے ب  
کے علی القوائم ہوگا اور سے ب صف ط کے مساوی ہوگا۔

اگر وقت کا عنصر بھی شریک کر لیا جائے اور شکل کے دو محلوں کے درمیان جو وقت کا وقفہ گزرتا ہے وہ صفات سے تعبیر کیا جائے تو  $\frac{\text{مفط}}{\text{مف ت}}$

کی انتہائی قیمت یعنی  $\frac{\text{فرط}}{\text{حرکت}}$  ”راوی رفتار“ کہلاتی ہے۔ شکل کے اس نقطہ کی رفتار جو فوری مرکز سے مطبق ہوتا ہے صفر ہے اور شکل کے کسی اور نقطہ پ کی رفتار سے پ پر علی القوائم ہے اور سے پ  $\frac{\text{فرط}}{\text{حرکت}}$  کے مساوی ہے۔

کسی مستوی شکل کی حرکت میں (جبکی وضع یا بناوٹ میں فرق نہیں آتا) مختلف نقطوں کے راستوں پر کے عماد سب کے سب فوری مرکز میں سے گذرتے ہیں۔ یہ امر ہندسی سوالات میں اکثر سودمند ثابت ہوتا ہے اگر شکل کے کسی دو نقطوں کے ہٹاؤں کی سمتیں معلوم ہوں تو فوری مرکز معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ یہ ان عمادوں کا نقطہ تقاطع ہے جو ان نقطوں کی حرکت کی سمتوں پر کھینچے جائیں۔ اس کے بعد باقی تمام نقطوں کے جو ہٹاؤں ان کی سمتیں اور اضافی مقداریں متعین ہو سکتی ہیں۔

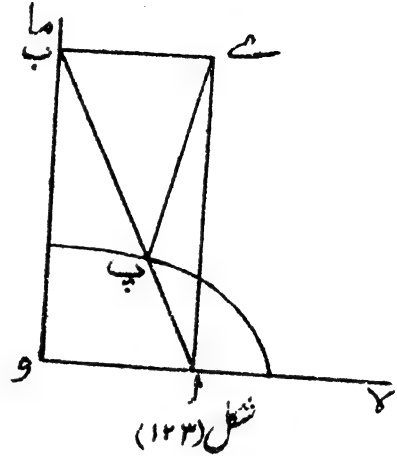
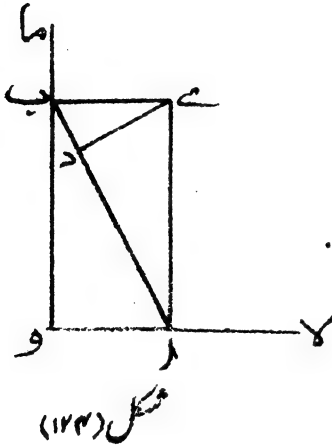
بعد ازیں متحرک شکل میں اگر کوئی خط (سیدھا یا ٹیڑھا) ہو تو ظاہر ہے کہ اس خط کے انتہائی تقاطع کا نقطہ یا نقاط اس کے متصل محل کے ساتھ صرف ان عمادوں کے پائے ہو سکتے ہیں جو فوری مرکز سے خط پر کھینچے جائیں کیونکہ خط کا کوئی اور نقطہ ایسی سمت میں حرکت کر رہا ہے جو اس کے ساتھ محدود زاویہ بناتی ہے۔

مثال ۱۔ متصل محل کا سیدھا خط (ب) ہے، اس کے سرے دو سیدھے علی القوائم خط ولا، وما رشم کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ خط پر کا کوئی نقطہ پ قطع ناقص مرشم کرتا ہے جس کے صدی محور ولا اور وما کی سمتوں میں ہیں۔ اوپر کے مسئلہ سے اس قطع ناقص کے

نقطہ پ پر عماد کھینچنے کا عمل مائل ہوتا ہے اور وہ یہ ہے۔ ولا اور و ما پر  
بالترتیب عمود اے ب سے کھینچو اے فوری مرکز ہے اور ب سے پ مطلوبہ  
عماد ہے۔ دیکھو شکل ۱۲۳۔

۳۵۸



مثال ۲۔ گزشتہ مثال میں متحرک خط ارب کا انتہائی تقاطع اس کے متصل مقام  
کے ساتھ نقطہ د ہے (شکل ۱۲۴) جو فوری مرکز سے خط ارب پر عمود  
کا پایہ ہے۔ اب اگر

$$\text{ارب} = \text{ل} > \text{و ارب} = \text{فہ}$$

تو د کے محدد ہیں

$$\text{لا} = \text{ب د جم فہ} = \text{ب ع جم فہ} = \text{ل جم فہ} \text{ کہ } \dots (۱)$$

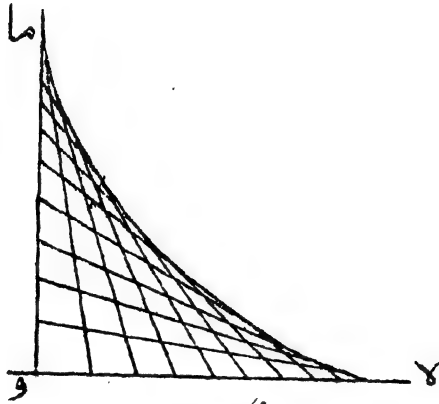
$$\text{ما} = \text{ا د جب فہ} = \text{ا ع جب فہ} = \text{ل جب فہ} \text{ کہ } \dots (۱)$$

اس لئے ارب کا لغات ستارہ نما

$$\text{لا} = \text{ما} + \text{ل} \dots \dots \dots (۲)$$

ہے، مقابلہ کرو دفعہ ۱۲۴ مثال ۴ کے ساتھ۔

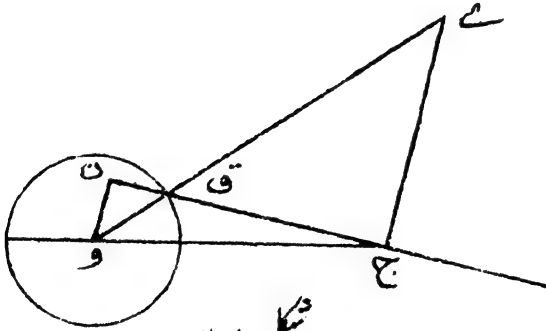




شکل (۱۲۵)

مثال ۳۔ ایک بازو وق اپنے ایک سرے و کے گرد زائدی رفتار سے  
کے ساتھ گھومتا ہے، قی پر ایک سلاخ چول کے ذریعہ وصل کردی گئی ہے جو  
ایک ثابت نقطہ ج میں سے لازماً گزرتی ہے۔ اس سلاخ کی رفتار اس کے  
طول کی سمت میں مطلوب ہے۔

۳۵۹



شکل (۱۲۶)

در اصل یہ تخم اُٹھنے والی اسطوانہ (Oscillating cylinder) والے بھاپ انجن  
کے کرنیک اور فشارہ میں پانی جاتی ہے جس میں نقطہ ج اسطوانہ کے  
چول خط پر واقع ہوگا۔

فوری مرکز وہ نقطہ ہے جہاں وق محدودہ 'ج' پر فشارہ کی سمت کے عمود<sup>دار</sup> خط کو قطع کرتا ہے۔ اگر سے ج ق (محدودہ بشرط ضرورت) پر عمود و ر ن کہیں جا جائے تو سلاح کے اس نقطہ کی رفتار جو ج پر متعلق ہوتا ہے یہ ہموی

$$\text{سر} \times \text{وق} \times \frac{\text{ج}}{\text{سے ق}} = \text{سر} \times \text{وق} \times \frac{\text{ون}}{\text{وق}} = \text{سر} \times \text{ون} \dots (۳)$$

۱۴۶۔ لڑکنے والے منحنیات میں استعمال۔

دو مستوی شکلیں ہیں دونوں کی بناوٹ غیر متغیر ہے۔ وہ دونوں شکلوں میں ایک ایک منحنی ثابت طور پر لگا ہوا ہے ایک شکل کا یہ منحنی دوسری شکل کے منحنی پر بغیر پھسلنے کے لڑکتا ہے۔ ایسی صورت میں ہر شکل کا کوئی نقطہ بلحاظ دوسری شکل کے ایک منحنی مرتسم کر لیا، منحنی جو اس طور پر مرتسم ہوا ہے گردویدہ کہتے ہیں۔

جن صورتوں میں لڑکنے والے منحنی دائرے ہیں دو دفعت ۱۲۲ تا ۱۲۴

میں زیر بحث آچکی ہیں۔

گردوینیوں کا عام نظریہ علم ہند

اور حرکیات میں اسوج سے اہمیت

رکھتا ہے کہ کسی شکل کی کوئی مسلسل

حرکت، خود اپنی سطح مستوی میں اس

حرکت پر متکل خیال کیا جاسکتی ہے کہ

ایک خاص منحنی جو بلحاظ شکل

ثابت ہے دوسرے ایک

خاص منحنی پر جو بلحاظ سطح

مستوی کے ساکن ہے

لڑکتا ہے۔ دیکھو دفعہ ۱۴۹

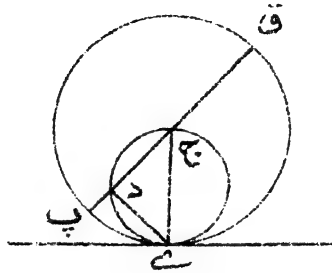
جب ایک مستوی منحنی ایک



شکل (۱۲۶)



کسی منحنی پر لڑنے کو اس کے کسی نقطہ کے راستہ پر یہ خط مستقیم عماد ہوگا (دفعہ ۱۲۴)



نقشہ (۱۲۸)

اس کے بعد اگر ایسے خط (سیدھے یا تیرھے) پر غور کیا جائے جسے لڑکنے والا منحنی ساتھ اٹھائے پھرتا ہے تو اس سوار منحنی کے انتہائی نقاط تقاطع اپنے متصل مقام کے ساتھ ان عمادوں کے پائے ہونگے جو نقطہ تماس سے سوار منحنی تک گھنچ سکتے ہیں۔ اور سوار خط کا لغاف ان پایوں کا طریق ہوگا۔

مثال ۱۔ ایک دائرہ ایک ثابت خط مستقیم پر لڑکتا ہو تو اس کا کوئی قطر خط عماد کو لطف کرتا ہے۔

لڑکنے والے دائرہ کا مرکز ج ہے اسے اس کا نقطہ تماس ہے، د ہے قطر پ ق پر عمود ہے۔ چونکہ د ایسے دائرہ پر واقع ہے جس کا قطر ج سے ہے اس لئے یہ دیکھنا آسان ہے کہ اگر چھوٹا دائرہ ہمیشہ بڑے دائرہ کی زاویہ رفتار کے دو چند سے لڑکتا فرض کیا جائے تو ثابت خط کے ساتھ اس کا نقطہ تماس وہی ہوگا اور نقطہ د اس طرح حرکت کریگا گویا چھوٹا دائرہ اسے اٹھائے ہوئے ہے۔ اس لئے اس کا طریق خط تدویر ہے۔

مثال ۲۔ اسی طرح اگر ایک دائرہ (د) ایک ثابت دائرہ (ج) پر لڑکتا ہو تو اس کے کسی قطر پر کا لغاف ایسا ”بر“ یا ”تدویر“ ہوگا جو د کے نصف ناپ کے دائرہ کو جب کے محیط پر لڑکانے سے پیدا ہو سکتا ہے۔

۱۲۷۔ نقطہ گرد و نیہ کا انحناء۔ فرض کرو کہ کوئی نقطہ پ بلحاظ لڑکنے والے

منحنی کے ایک ثابت نقطہ ہے، اس نقطہ کے راستہ کا اسٹنڈا معلوم کر نیکی لے  
فرض کرو کہ مے نقطہ تماس ہے اور مے متصل نقطہ تماس ہے اور  
حباب حباب کا متناظر مقام ہے۔

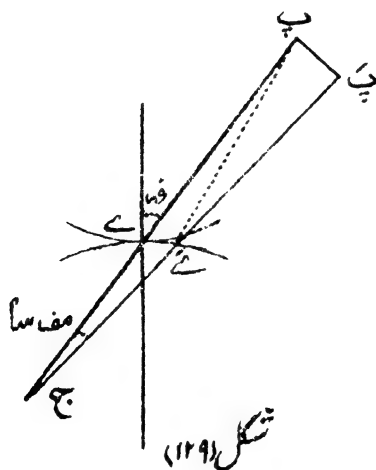
چونکہ اُڑکنے والے مٹخی کا جو نقطہ ہے یہ آتا ہے اسکا ہٹاؤ دوسری رتیں  
کی جھوٹی مقدار ہے اس لئے جس زاویہ میں سے شکل گھوم جاتی ہے وہ آہٹائی  
نسور ت میں ہے

مفصلہ = پے پے ..... (۱)

فرض کرو کہ چ کے راستہ کے عماد چ سے اور پ سے خارج ہو کر ایک دوسرے سے جچ پر ملتے ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ نصف مساوی ہے۔

مف سا = > جے جے =  $\frac{\text{مف سا} \times \text{جیم فٹ}}{\text{جے}}$  ..... (۲)

جہاں فدا وہ زاویہ ہے جو ہے پے پے پر کے عماد کے ساتھ بناتا ہے۔



۳۶۲ | نیز شکل سے مفہوم سا۔ دپ مے پ۔ دے پے

$$= \text{مف طہ} - \frac{\text{مف سو جم فہا}}{\text{پے}}$$

$$(۳) \text{ مف سو} \left( \frac{۱}{س} + \frac{۱}{س} - \frac{۱}{\text{جم فہا}} \right) \text{ پے}$$

دفعہ ۱۴۶ (۱) کی رو سے اگر میں اور میں ثابت اور لڑکنے والے منحنیوں کے انخفا کے نیم قطر ہوں۔ (۲) اور (۳) کو مساوی رکھنے سے

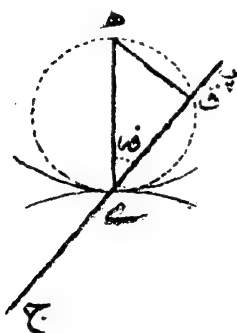
$$(۴) \text{ جم فہا} \left( \frac{۱}{س} + \frac{۱}{س} \right) = \frac{۱}{س} + \frac{۱}{س}$$

اس سے ج کا اتہائی مقام یعنی پ کے راستہ کا مرکز انخفا حاصل ہوتا ہے۔ نیم قطر انخفا اس کے بعد حاصل ہوگا

$$(۵) \text{ فہا} = \text{ج پ} = \text{جے} + \text{پے}$$

(۴) اور (۵) میں جو نتیجہ مشتکل ہے اسے سادہ ہندسی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔ پ کے عماد پر طول سے ہ ایسا کاٹو کہ

$$(۶) \text{ ہے} = \frac{۱}{س} + \frac{۱}{س}$$



شکل (۱۳)

اور ہے کے قطر پر دائرہ کھینچو۔ فرض کرو کہ ہے پ اس دائرہ کو

ق پر ملتا ہے۔ تب

$$\frac{1}{ق} = \frac{1}{س} = \frac{1}{س} \div \left( \frac{1}{س} + \frac{1}{س} \right) = \frac{1}{س} \div \left( \frac{2}{س} \right) = \frac{1}{2}$$

اس لئے رشتہ (۳) یہ شکل اختیار کرتا ہے

$$\frac{1}{ج} = \frac{1}{پ} + \frac{1}{ق} \quad (۴)$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر پ، ق پر منطبق ہو جائے تو ج سے لامتناہی ہوگا یعنی تھرک شکل کا کوئی نقطہ جو اس دائرہ پر واقع ہو جس کی ابھی تعین کی گئی راستہ کے نقطہ انعطاف پر ہوگا۔ اس وجہ سے دائرہ زیر بحث کو ”انعطافوں کا دائرہ“ کہتے ہیں۔

(۴) اور (۵) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{ج} = \frac{1}{پ} \times \frac{1}{ق} = غا \quad (۸)$$

آخر کے نتیجہ سے ظاہر ہے کہ غا، ق پ کے ساتھ علامت بدلتا ہے یعنی تھرک شکل کے مختلف نقطوں کے راستے سے کی جانب مقعر یا محدب ہیں بموجب اسکے کہ وہ انعطافوں کے دائرہ کے ایک جانب واقع ہیں یا دوسری جانب۔ اوپر کی معیاری صورت میں یہ راستے سے کی طرف مقعر ہیں اگر پ دائرہ کے باہر ہو اور محدب ہیں اگر پ اندر ہو۔ استمداری انجیناٹ سے جو دفعہ ۱۲۲ صفحہ (۲۰۳) پر دیے گئے ہیں اسکی ایک مثال اس پر آتی ہے۔ اس صورت میں انعطافوں کا دائرہ لڑکنے والے دائرہ کے ناپ کا آدھا ہے۔

۳۶۳

ہم نے معیاری صورت وہ لی ہے جس میں دو منحنی بلحاظ ایک دوسرے کے محدب ہیں دیکھو اشکال ۱۲۴، ۱۲۹۔ اور کوئی صورت س اور س کو مناسب علامات دینے سے اوپر کے نتائج میں شریک کر لیا جاسکتی ہے۔ سکونیات میں ”مجھولے والے پھروں“ کی حرکت میں اوپر کا نظریہ

استعمال ہوتا ہے۔ جب ایک کھر در جسم فقط ایک نقطہ تماس کے ذریعہ دوسرے جسم پر ساکن ہوتا ہے تو اس کا مرکز ثقل انتصافاً نقطہ تماس کے اوپر واقع ہوتا ہے اور توازن کے قائم ہونے کے لئے یہ ضروری ہے کہ مرکز ثقل کا راستہ کسی لڑکنے کے ہٹاؤ کی صورت میں، اوپر کی جانب مقعر ہو۔

مثال ۱۔ خط دویر میں اگر کون دائرہ کا نیم قطر  $l$  ہو تو  
 $s = \infty$  'س'  $l = 1$  'ے'  $p = 2$  'جم' فضا  
 (۴) میں درج کرنے سے

ج 'ے'  $l = 2$  'جم' فضا = 'ے'  $p$  ..... (۱۰)  
 اس لئے فضا =  $2$  'ے'  $p$  ..... (۱۱)

مثال ۲۔ برتندویر (دفعہ ۱۲۳) میں

س =  $l$  'س' =  $p$  'ے'  $p = 2$  'جم' فضا ..... (۱۲)

جس سے ج 'ے' =  $\frac{2 + p}{2 + l}$  'جم' فضا =  $\frac{l}{2 + l}$  'ے'  $p$  ..... (۱۳)

فضا =  $\frac{2 + (l + p)}{2 + l}$  'ے'  $p$  ..... (۱۴)

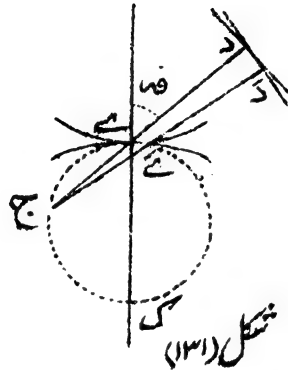
یہ قابل توجہ ہے کہ اگر  $b = -\frac{l}{r}$  تو فضا =  $\infty$  'مقابلہ کرد دفعہ ۱۲۴'  
 مثال ۲ کے ساتھ۔

۱۴۸۔ خط گرونیہ (Line Roulette) کا انحن۔ خط گرونیہ کا

انحن یعنی ایک ایسے خط تقسیم کے لفاف کا انحن جسے لڑکنے والا منحنی اٹھائے پھرتا ہے زیادہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے۔ خط کے دو متصل مقامات پر 'توری مرکز کے تناظر مقامات سے (جو فضا میں ہیں) عمود سے دئے دئے نکالے گئے ہیں' یہ لفاف کے عماد ہیں اور جو زاویہ یہ اپنے تقاطع (ج) پر ایک دوسرے سے بناتے ہیں وہ گھماؤ کے زاویہ معکوس طے کے ساتھ



اگر مے د لڑکنے والے انحناء کے نقطہ مے پر کے عماد کے ساتھ زاویہ  
فنا بنا مے اور مے مے = مف سے تو انتہائی صورت میں  
مف سے جم فنا = ج سے مف طنا ..... (۱)



اس لئے دفعہ ۱۴۶ (۱) سے مف طنا کی قیمت درج کرنے سے

۳۶۳

جم فنا = ج سے مے + مے سے د ..... (۲)  
لفاف کا نیم قطر انحناء حاصل ہوگا

فنا = ج سے مے + مے سے د ..... (۳)  
لڑکنے والے انحناء کے نقطہ سے پر جو عماد ہے او اس پر طول  
مے تک ایسا نکالو کہ

مے کی = مے سے د + د سے مے ..... (۴)

دفعہ گذشتہ میں ناپنے کی جو سمت ہے اسکی مخالف سمت یہ طول بنایا  
جائے۔ مے کی کے قطر پر دائرہ کھینچو۔ (۲) سے ظاہر ہے کہ  
ج اس دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔ دوسرے الفاظ میں لڑکنے والے

منحنی کے کسی معلوم مقام کے لئے تمام خط گردنیوں کے انحناء کے مرکزوں کا طرلق ایک دائرہ ہے۔ اور جب برداشتہ خط گ میں سے گزرے تو د ج پر منطبق ہوگا اور ج لفاف پر ساکن نقطہ (دفعہ ۱۳۳) ہوگا۔ اوپر کے دائرہ کو اس لئے قرون کا دائرہ کہا جاتا ہے۔

مثال ۱۔ اگر خط تدویر کو ایسے دائرہ کے ایک قطر کا لفاف خیال کیا جائے جو ایک ثابت خط مستقیم (دفعہ ۱۴۶ مثال ۱) پر لڑکتا ہے تو یہ مستطیل ہوتا ہے کہ نیم قطر انحناء عماد کا دو چند ہے۔

مثال ۲۔ ”بتدویر“ کو ایک ایسے دائرہ کے قطر کا لفاف سمجھ کر جو ایک اور ثابت دائرہ پر لڑکتا ہے تکوین کی گئی ہے تب دفعہ ۱۲۳ کی ترمیم کے مطابق  $s = \frac{1}{2}r$  اور اصلے (۲) سے

$$ج = \frac{1}{2} \frac{b}{b+1} \text{ جم فضا} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+2} = \frac{1}{6}$$

جو دفعہ ۱۴۶ مثال ۲ کے مطابق ہے۔

۱۴۹۔ کسی شکل کی مسلسل حرکت اپنی مستوی سطح میں۔

کوئی مستوی شکل اپنی مستوی سطح میں متحرک ہے، اسکے مختلف محلوں کے مسلسل سلسلہ پر غور کرو۔ فوری مرکز کا فضا میں ایک خاص طرلق (لوکس) ہوگا اور شکل کے اندر بھی ایک خاص طرلق ہوگا۔ ایسے منحنیوں کو جنکی اوپر تعریف ہوئی مرکز طرلق کہتے ہیں، اول اند کو ہم فضا کی مرکز طرلق کہینگے اور موزر اند کو جسی مرکز طرلق۔ جس مسئلہ کا دفعہ ۱۴۶ میں حوالہ دیا گیا ہے وہ یہ ہے کہ شکل کی کوئی معلوم حرکت جسی مرکز طرلق کے فضا کی مرکز طرلق پر بغیر پھسلنے کے لڑکنے سے پیدا ہو سکتی ہے۔

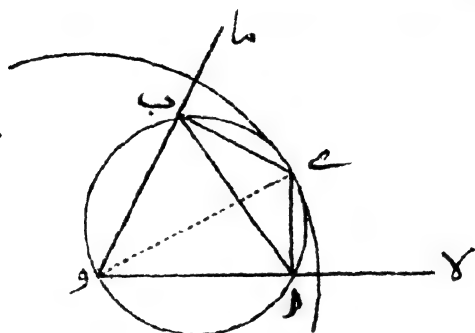
شکل کے کسی معلوم محل پر غور کرو، فرض کرو کہ  $s$  اس کا فوری مرکز اور  $r$ ،  $z$ ، بالترتیب متصل متناظر نقطے ہیں جسی مرکز طرلق اور فضا کی مرکز طرلق پر۔

فرض کرو کہ جسم زیادہ مفطما میں سے گھومتا ہے جیسے فوری مرکز سے ہے آؤ پر چلا جاتا ہے۔

تب انتہائی صورت میں دفعہ ۱۴۵ کی رو سے

عے = عے اور عے = عے

اس لئے زاویہ مئے نے ڈاکٹرا میں معدوم ہو جاتا ہے اور مئے پر دونوں طریقوں کے ماسی خط ایک دوسرے پر منطبق ہو جاتے ہیں اور دونوں منحنيات کی متناظر عنصری قوسیں نسبت تساوی میں ہوتی ہیں۔



مسئلہ (۱۳۲)

مثال - مستقل طول کا خط مستقیم الرب اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کے سرے دو ثابت خطوط مستقیم ولا، وما پر رہتے ہیں۔

فوری مرکزے، وکلا، و ما پر کے عمودوں کا نقطہ تقاطع ہے جو بالترتیب

نقاط اور ب پر کھینچے جائیں۔ نقاط اور ب ایک دائرہ پر واقع

ہوتے ہیں جس کا قطر  $r$  ہے اور چونکہ اس دائرہ میں دے ہوئے طول کا وتر

اب محیط پر ایک مستقل زاویہ اور ب بنا تا ہے اس کا قطر متعین ہو سکتا ہے

اسلئے سے کا فضائی طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز  $O$  ہے۔ نیز چونکہ زاویہ

اے بے ستم ہے اسلئے کہ اس کا طریق بلحاظ ادب کے ایک دائرہ

ہے جس کا تپ و مے کی سفل قیمت کے مساوی ہے۔ اس لئے حرکت زیر بحث

ایک دائرہ کے دو سرے ثابت دائرہ کے اندر جس کا ناب دو چند ہے لڑکنے کے معادل ہے۔ ایسی حرکت پر دفعہ ۱۲۴ مثال ۲ میں بحث کی گئی ہے اور یہ دکھایا گیا ہے کہ کوئی نقطہ پ جو بلحاظ ا ب کے ثابت ہے قطع ناقص پر رسم کرتا ہے جو بعض صورتوں میں جبکہ پ لڑکنے والے دائرہ کے محیط پر واقع ہوگا ایک خط مستقیم میں بگڑ کر رہ جاتا ہے۔

۱۵۰۔ بردوریوں کی بطور گردونیوں کے دوہری نکوین۔

مزید مثال کے طور پر ہم یکساں دائری حرکتوں کو جوڑا متوازی الاضلاع وق پ ق کے ذریعہ جس کا دفعہ ۱۲۵ میں حوالہ دیا گیا ہے ترکیب دینے کے پہلی طریقہ کی طرف عود کرتے ہیں۔

تخصیص کی خاطر فرض کرو کہ سلاخوں وق، وق کی زاوی

رفاریں ن، ن ایک ہی علامت رکھتی ہیں۔

سلاخ وق پ کا فوری مرکز (ے) ایسا نقطہ وق و میں ہوگا

ن × ق = ے = ن × وق ..... (۱)

کیونکہ کسی ایسے نقطہ کی رفتار جو ق پ کے ساتھ استوار طور پر

لگا ہوا ہے شکل ہوگی انتقالیت ن × وق پر جو وق کے

علی القواثم۔ ہے اور ایسے لکھاؤ پر جو ق کے لحاظ سے زاوی رفتار

ن سے عمل میں آتا ہے۔ اس لئے شرط بالا کے تحت ایسے نقطہ کی

رفتار جو ق پ کے ساتھ لگا ہوا ہے اور آن زیر بحث میں نقطہ

ے پر ہے صفر ہوگی۔ اس لئے سلاخ وق پ کی حرکت کے لئے

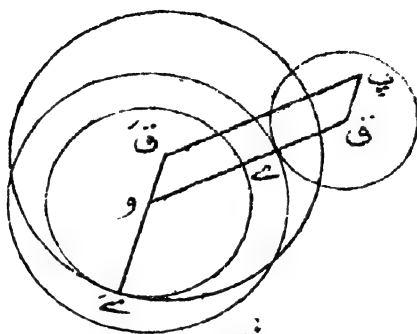
دو مرکز طریق ہیں جو و اور ق کو مرکز مان کر پہنچ جائیں اور ے میں

سے گزریں۔

اسی طرح کے استدلال کی بنا پر سلاخ وق پ کا فوری مرکز

(ے) ایسا نقطہ وق و میں ہوگا کہ

ن × ق = ق = ن × وق ..... (۲)\*



نشل (۱۳۳)

پس سلاخ ق پ کی حرکت کے لئے دو مرکز طرہی دائرے ہونگے جنکے مرکز و اور ق ہونگے اور جو عے میں سے گزریں گے۔  
چونکہ نقطہ پ دونوں سلاخوں ق پ اور ق پ پر واقع ہے ہم دیکھتے ہیں کہ کوئی سیدھا یا راستہ بر دور یہ بطور براستہ ادی کے دو طرح سے مرتبہ ہو سکتا ہے۔

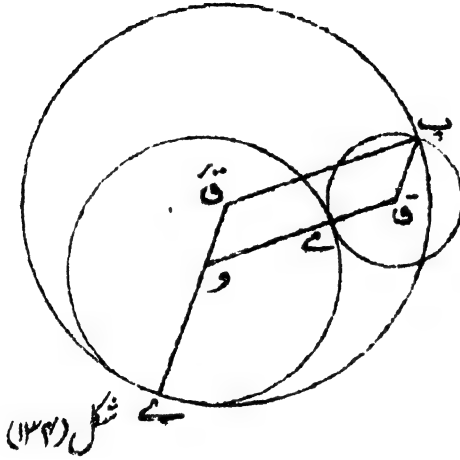
اس خاص صورت میں جبکہ ق پ = ق = عے (۱) اور (۲) سے ماہل ہوتا ہے

ق پ : وق = ق = عے : وق = ن : ن = وق : ق = عے  
ق پ : ق = عے

پس سے ق پ = وق = ق = عے  
پ کا راستہ اس صورت میں برتدویر ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ کسی برتدویر کی دو طرح سے تکوین ہو سکتی ہے یعنی دو معین دائروں میں سے

\* نشل ۱۳۲ اس صورت کے لئے کھینچی گئی ہے جبکہ ن = عے۔ اگر ن > عے  
تو عے ق و مزدون پر واقع ہوگا اور عے تقاطع ق اور و کے درمیان۔

کسی ایک کو ایک ہی ثابت دائرہ کے باہر لڑکانے سے دیکھو شکل ۱۳۴۔  
مثال کے طور پر خط صنوبری (Cardioid) کی جس کا ذکر دفعہ ۱۲۴ مثال ۳۶۷  
۱۳۷ میں پہلے آیا ہے، دوہری تکوین دی جاتی ہے۔



جس صورت میں زاوی رقتاروں 'ن' کی علامتیں مختلف ہوں  
اسے طالب علم کے معائنہ کے لئے چھوڑا جانا ہے۔ یہ معلوم ہوگا کہ کسی آٹے  
یا جعبی بردوریہ کی بطور ایک دراستداری خط کے 'دوا لگ طریقوں سے  
تکوین ہو سکتی ہے اور یا مخصوص کسی درتدویر کی تکوین دو قابل تعین دائروں  
میں سے کسی ایک کو ایک ہی ثابت دائرہ کے اندر لڑکانے سے  
علی میں آسکتی ہے۔

## امثلہ ۴۶

انحناء

۱۔ ثابت کرد کہ دائرہ ہی ایک ایسا انحناء ہے جس کا انحناء مستقل ہے۔

\* یہ رولر (۱۷۸۱) کا مسئلہ ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ منحنی کے کسی نقطہ (لا، ما) پر انحناء کے مرکز کے محدد اس شکل میں رکھے جاسکتے ہیں

$$\text{لا} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرسا}} + \text{ما} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرسا}}$$

۳۔ ثابت کرو کہ مساوی الزاویہ لوبی کی ذاتی مساوات اس شکل کی ہے

$$\text{س} = \frac{\text{سا}}{\text{سم}} \text{سم}$$

۴۔ ثابت کرو کہ خط جبری کی ذاتی مساوات اس شکل میں لکھی جاسکتی ہے

$$\text{س} = \frac{\text{لوک}}{\text{قم}} \text{سا}$$

ثابت کرو کہ اس منحنی میں انحناء ایسے بدلتا ہے جیسے عماد۔

$$۵۔ \text{ان ضابطوں} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \text{جم سا} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} = \text{جب سا}$$

$$\text{کے تفرق سے ثابت کرو کہ} \quad \frac{1}{\text{س}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} / \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} / \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}}$$

$$\text{اور} \quad \frac{1}{\text{س}} = \left( \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} \right) + \left( \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} \right) \quad \text{جہاں سرانیم قطر انحناء ہے}$$

۶۔ اگر ایک منحنی کا ان مساواتوں سے تعین ہو

$$\text{لا} = \text{فارت} \quad \text{ما} = \text{ف} \quad \text{ت}$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ} \quad \frac{1}{\text{س}} = \frac{\text{لا} - \text{ما}}{\text{لا} + \text{ما}} \quad \text{جہاں زبروں سے تفرق بلحاظ}$$

ت کے تعبیر ہوتا ہے۔

۷۔ اوپر کا ضابطہ قطع ناقص لا = اجم فسا، ما = ب جب فسا اور قطع زائد لا = اجم ع، ما = ب جب ع کی صورت میں نکلاؤ۔

۸۔ ایک منحنی کی کارٹیزی مساوات دی ہوئی ہے، بتاؤ کہ اسکے کسی نقطہ کے محدد (لا، ما) کس طرح اس کے میلان (سا) کی قوم میں بیان ہو سکتے ہیں

اور ثنابت کرو کہ

$$\sqrt{\left(\frac{فرسا}{فرسا}\right)^2 + \left(\frac{فرسا}{فرسا}\right)^2} = س$$

۹- جس منحنی کی ذاتی مساوات  $س = م$  جب  $سا$  ہے ثنابت کرو کہ وہ

خط تدویر ہے (دفعہ ۱۲۰) (۳) کا طریقہ استعمال کرو)

۱۰- "مساوی مضبوطی کے زنجیرہ" کی صورت میں معلوم ہے

$$س = م \text{ قسط } سا \text{ (م مستقل)}$$

جہاں  $سا$  مماس کا میلان ہے افق کے ساتھ ثنابت کرو کہ اگر میدان سبنچلے نقطہ پر ہو تو  $لا = م$   $سا = ما = م$  لو کہ قسط  $سا$  جہاں محور  
۸ اور  $سا$  بالترتیب افقی اور انتصابی ہیں۔۱۱- ایک منحنی کی ذاتی مساوات دی گئی ہے  $س = م$  جب  $سا$   
(م مستقل) اسکی کارٹیزی مساوات حاصل کرو

$$لا = ما + \frac{م^2}{س} = \frac{م^2}{س} \left( \frac{م}{س} \right)$$

۱۲- اگر  $س = \frac{لا}{ما}$  تو ثنابت کرو کہ  $ما = م$  - ۲  $لا$  جم  $سا$ ۱۳- وہ منحنی دریافت کرو جسکی ذاتی مساوات ہے  $س = م$  وقسط  $سا$   $لا = ما = \frac{م^2}{س}$  ۹۱۴- اگر منحنی پر کے کسی نقطہ کے محدود  $لا$   $ما$  متغیرت کے دے ہوئے  
تفاعل ہوں تو ثنابت کرو کہ

$$\frac{فرسا}{فرت} = \frac{فرسا}{فرت} \text{ جم } سا - \frac{1}{س} \left( \frac{فرسا}{فرت} \right) \text{ جب } سا$$

$$\frac{فرسا}{فرت} = \frac{فرسا}{فرت} \text{ جب } سا + \frac{1}{س} \left( \frac{فرسا}{فرت} \right) \text{ جم } سا$$

ان نتائج کی حرکیاتی تعبیر بیان کرو۔ اسلئے ثنابت کرو کہ



$$\frac{1}{r} = \left\{ \left( \frac{r^2}{\text{فرت}} \right) \times \left( \frac{r^2}{\text{فرت}} \right) - \frac{r^2}{\text{فرت}} \right\} \div \left( \frac{\text{فرت}}{\text{فرت}} \right)$$

۱۵۔ ستارہ نما (لا) = رجم طہا، ما = رجب طہا میں ثابت کرو کہ

سا = طہا اور اس سے ثابت کرو کہ س = ۳ رجب طہا رجم طہا

۱۶۔ اگر (لا) = ۲ ات، ما = ۲ ات تو مرکز انجمن کے محدودیں

$$(۲ + ۳ ات) - ۲ ات$$

۱۷۔ دفعہ ۱۳۵ (۲) کے کارٹیزی ضابطہ سے ثابت کرو کہ قائم قطع زائد

$$(لا) = ما = م میں س = \frac{(لا + ما)}{۲}$$

۱۸۔ نیز قطع ناقص  $\frac{(لا)}{۲} + \frac{(ما)}{۲} = ا میں س = \frac{(لا + ز(لا))}{۲}$

۱۹۔ نیز قطع زائد  $\frac{(لا)}{۲} - \frac{(ما)}{۲} = ا میں س = \frac{(لا - ز(لا))}{۲}$

۲۰۔ نیز قطع مکانی  $ما = ۲ لا میں س = \frac{۲(لا + ۱)}{۲}$

۲۱۔ نیز نیم بی مکانی  $لا = ما = ۲ لا میں س = \frac{۲(لا + ۱ + ۱)}{۲}$  ۳۰

۲۲۔ نیز کبی مکانی  $لا = ما = ۲ لا میں س = \frac{۲}{۲} (۱ + ۱) \left( \frac{لا}{۲} \right)$

۲۳۔ نیز ستارہ نما  $لا + ما = ۲ لا میں س = ۳ (لا + ما)$

۲۴۔ ایک منحنی کے متغیر نقطہ (لا، ما) کے فاصلہ کا مربع ثابت نقطہ (ضہا، عا) سے اس جملہ (لا - ضہا) + (ما - عا) سے تعبیر ہوتا ہے، اس جملہ کو تفرق کرنے سے ثابت کرو کہ جب یہ فاصلہ اہل ہو تو نقطہ (لا، ما) کو لازماً اس عماد کے پایہ پر واقع ہونا پڑے جو (ضہا، عا) سے اس منحنی تک پہنچ سکتا ہے۔

نیز یہ فاصلہ اقل ہوگا اگر نقطہ (ضبا، عا) مرکز انحنائی یہ نسبت منحنی سے زیادہ قریب ہو اور اعظم ہوگا اگر یہ نقطہ مرکز انحنائی یہ نسبت منحنی سے زیادہ بعید ہو۔

۲۵۔ اگر منحنی کو ابدال  $لا = عا$ ،  $لا = ما$ ،  $ما = با$  سے تحویل کیا جائے تو کسی نقطہ

پر کا انحنائے نسبت سے بدل جاتا ہے  $(ع + جم + سا + با + عا) \div ۴$  جہاں سا ہے محور  $لا$  کے ساتھ اصلی منحنی کا میلان۔

۲۶۔ ثابت کر دو کہ  $\frac{فرسا}{فرس} = \frac{ع ۳ ق - (۱ + ع) ۲ ر}{ق ۲}$

جہاں  $ع = \frac{فرسا}{فرلا}$ ،  $ق = \frac{فرما}{فرلا}$ ،  $ر = \frac{فرما}{فرلا}$

۲۷۔ قطع ناقص کے کسی نقطہ پر انحنائے  $\frac{جم ۲}{ر ۲}$  ہے جہاں  $ر$  و  $سا$  ماسکے فاصلے ہیں اور  $فا$  ان کا درمیانی زاویہ ہے۔

۲۸۔ تمام قطع زائد  $ر$  جم  $۲$  ط  $۲$  =  $لا$  میں  $ر = \frac{ر ۳}{ر ۲}$

۲۹۔ چشمہ منحنی

$ر = ر$  جم  $۲$  ط  $۲$  میں  $ر = \frac{ر ۳}{ر ۲}$

۳۰۔ منحنی  $ر = ر$  جم  $۲$  ط  $۲$  میں  $ر = \frac{ر ۳}{ر ۲} = \frac{ر ۳}{ع (۱ + م) + (۱ + م) ۲ - م ۳}$

۳۱۔ ضابطہ  $ر = \frac{ر ۳}{ر ۲} = \frac{ر ۳}{ع (۱ + م) + (۱ + م) ۲ - م ۳}$  سے برتدویر کے کسی نقطہ پر کا نیم قطر

انحداد ریافت کرو۔ (دیکھو مثال ۲۶ صفحہ ۲۴۹)

دائرہ کے درجہ کی صورت کا معائنہ کرو۔

۳۲۔ اگر منحنی کی مساوات اس شکل  $ر = ف (ع)$  میں دی ہوئی ہو تو قطب سے

گذرنے والا و تراخنا ہوگا  $\frac{ع}{فر}$  ۲

ثابت کرو کہ خط متوہری کے قطب میں سے گذرنیو والا و تراخنا سمتی نیم قطر کا  $\frac{۱}{۲}$  گنا ہوتا ہے۔

۳۳۔ ثابت کرو کہ قطب میں سے گذرنے والا منحنی  $ر = \frac{۱}{۲}$  جسم  $م$  طہ کے کسی نقطہ پر کا و تراخنا  $\frac{۲}{۳}$  ہے۔

۳۴۔ ثابت کرو کہ منحنی  $ر = (ع)$  کے پائین منحنی کا انخنا بلحاظ مبدأ کے

$\frac{۲}{۳}$  -  $\frac{ع}{۳}$   $ر$  ہے جہاں  $ر$ ،  $ع$ ،  $م$  اصلی منحنی سے متعلق ہیں۔

۳۵۔ ایک قطع ناقص کے نیم محور  $ا$ ،  $ب$  ہیں، ثابت کرو کہ بلحاظ مرکز کے اسکے

پائین منحنی کا انخنا  $\frac{۳}{۲} - \frac{ا+ب}{۲}$  ہے جہاں  $ر$  قطع ناقص کے متناظر نقطہ کا سمتی نیم قطر ہے۔

۳۶۔ ذیل کے ضابطہ کو ثابت کرو۔

$$\frac{۱}{ر} = \left\{ \frac{۱}{ر} - \frac{۱}{ر} \left( \frac{فر}{فرس} \right) \right\} \div \left\{ ۱ - \left( \frac{فر}{فرس} \right) \right\}$$

اور مثال ۲۴ کے نتائج حاصل کرنے میں اسے لگاؤ۔

۳۷۔ ثابت کرو کہ قطبی محدودوں میں اہل ماس کے لئے شرط ہے

$$\frac{فر}{طہ} + ۶ = ۰ \quad \text{جہاں } ۶ = \frac{۱}{ر}$$

۳۸۔ اس ضابطہ  $سا = طہ + فا = طہ + مم$   $\frac{۱}{ر}$   $\frac{فر}{طہ}$  سے

قطبی محدودوں میں انخنا کے لئے یہ ضابطہ حاصل کرو

$$\frac{۱}{ر} = \left\{ \frac{۱}{ر} - \frac{۱}{ر} \left( \frac{فر}{فرطہ} \right) \right\} \div \left\{ ۱ + \left( \frac{فر}{فرطہ} \right) \right\}$$

$$= \left( \frac{6^2}{فرطہ} + ۶ \right) \div \left\{ \left( \frac{۱}{۶} \right) \left( \frac{فرطہ}{۶} \right) + ۱ \right\} \left\{ \frac{۳}{۶} \right\} \text{ جہاں } ۶ = \frac{۱}{۳}$$

۳۹۔ اس ترقیم کے موافق ثابت کرو کہ مبدأ میں سے گذر نیوالا وتر انحنائے

$$۳ \left\{ \left( \frac{۱}{۶} \right) \left( \frac{فرطہ}{۶} \right) + ۱ \right\} \div \left( \frac{فرطہ}{۶} + ۶ \right)$$

### مشل ۴

#### نیوٹن کا طریقہ

۱۔ منحنی ۱ ما = (لا - عا) (لا - جہا) کا نیم قطر انحنائے نقطہ (عا، جہا) پر ہے

$$\frac{(لا - عا)(لا - جہا)}{۲}$$

۲۔ نیوٹن کے طریقہ سے ثابت کرو کہ زنجیرہ ما = لا جہا کے رأس پر نیم قطر انحناء کے مساوی ہے۔

۳۔ نقطہ (۱، ۱) پر منحنی ما = لا (لا + لا) / لا کا نیم قطر انحناء ہے۔

۴۔ ڈوائن ما = لا (لا - لا) / لا کا نیم قطر اس کے رأس پر ہے۔

۵۔ نقطہ (۱، ۱) پر منحنی لا = لا (لا - لا) کا نیم قطر انحناء دریافت کرو۔

۶۔ مکانی (لا - ما) = لا (لا + ما) + لا = لا کا نیم قطر انحناء ان نقطوں پر دریافت کرو جہاں پر یہ محوروں کو مس کرتا ہے۔

۷۔ نقطہ لا = لا پر منحنی ما = لا جب لا - جب لا کا نیم قطر انحناء دریافت کرو۔

$$[۲، ۴، ۵، \dots]$$

۸۔ مکانی ما = لا + لا میں 'بیدار'، 'نور' کے متوازی وتر انحناء

کا طول (۱ + م) ہے اور دائرہ انحناء کی مسادات ہے

$$لا + ما = (۱ + م) لا (ما - م لا)$$

۹۔ منحنی ما = م لا + ن (لا - لا) (لا - جہا) کا انحناء نقطہ (لا، جہا) پر ہے

دریافت کرو۔

$$\left[ \frac{2^{\frac{1}{2}}(m+1)}{2^n(1-b)} \right]$$

۱۰۔ مبداء پر محرومی ما = (لا + ۲ھ لا ما + ب ما) کے دائرہ انحنایک مساوات معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ منحنی سے دوبارہ خط مستقیم (ب-ا) = ۲ھ لا پر ملتا ہے۔

۱۱۔ اگر ایک منحنی کی قطبی مساوات  $r = f(\theta)$  ہو جہاں  $f(\theta)$  (طما) طما کا جفت تفاعل ہے تو نقطہ طما = - پر انحنایک  $f(\theta) - f(\theta) = 0$  [فما (۰)]

۱۲۔ زیادہ سے زیادہ کشش کے مجسم (دیکھو مثال ۱۹ صفحہ ۴۲۹) کے نصف النہاری منحنی میں ثابت کرو کہ محور کے سروں پر نیم قطر انحنایا بالترتیب ۵۵ اور ۲۰ ہیں۔  
۱۳۔ چشمہ منحنی (ا) = (ا) جم ۲ طما کے کسی ایک سرے پر نیم قطر انحنایا  $\frac{1}{2}$  ہے۔

۱۴۔ استداری خط لا = ۱ طما + ک جب طما، ما = (ا) - ک جم طما کے نیم قطر انحنایا ان نقطوں پر جہاں یہ قاعدہ سے نزدیک ترین اور بعید ترین ہے (ا ± ک) ہیں۔

۱۵۔ نیوٹن کے طریقہ سے ثابت کرو کہ بر دور یہ

لا = (ا) جم ن ت + (ا) جم ن ت، ما = (ا) جب ن ت + (ا) جب ن ت کے انحنایک نیم قطر ان نقاط پر جو مرکز سے قریب ترین اور بعید ترین ہیں یہ ہیں

$$(n, 1 \pm 1, n, 1)$$

۱۶۔ شرط مستقیم کرو کہ مرکز سے قریب ترین نقاط پر بر دور یہ کو مرکز کی جانب مقعر ہونا چاہئے (جیسے چاند کا مدار لجا سورج کے)۔

۱۷۔ ایسا زو کے منحنی لا = (ا) جم ن ت، ما = (ا) جب ن ت کے نقطہ

ت = پراخنا کا نیم قطر دریافت کرو۔

[۴ب/۱]

اس نمنی کا خاکہ کیجیو۔

۱۷۔ اگر ایک نمنی کی مسادات قطبی محدودں (ر، ط) میں ہو اور قطب نمنی پر واقع ہو اور ابتدائی خط قطب پر کا ماس ہو تو ثابت کرو کہ قطب پراخنا کا قطر

$$= \frac{1}{2} \text{ ماس}$$

نمنی (ر) = رجم م ط کے قطب پراخنا کا نیم قطر دریافت کرو۔

۱۸۔ اگر ایک نمنی پر نقطہ پ ایسا ہو کہ اس پر کا انخنا غیر متسل ہو لیکن ماس کی سمت غیر متسل نہ ہو اور پ کی مقابل جانبوں میں پاس کے نقطے ق، ر

ہوں تو ثابت کرو کہ دائرہ پ ق ر کا انخنا آخر الامر ہوگا  $\frac{1}{2} \text{ ماس} + \frac{1}{2} \text{ ماس}$  جہاں

ماس، ماس دے ہوئے نمنی کے انخنا کے نیم قطر ہیں پ کے دونوں جانب اور ماس

نسبتوں  $\frac{پ ق}{ق ر}$  اور  $\frac{پ ص}{ق ر}$  کی انتہائی قیمتیں ہیں۔

۱۹۔ حادہ زاویہ جو ایک نمنی کا ایک وتر پ ق، پ پر کے ماس کے

ساتھ بناتا ہے جبکہ ق کو پ کے لانتہا قریب لیا جاتا ہے آخر الامر  $\frac{1}{2} \text{ ماس}$

کے مساوی ہے جہاں ماس قوس پ ق ہے اور ماس نیم قطر انخنا ہے پ پر

۲۰۔ اگر ایک لانتہا چھوٹی قوس پ ق کے سروں پر کے ماس ماس پر لیں تو آخر الامر پ اور ماس ق نسبت شادی میں ہونگے۔

یہ کیوں حاصل نہیں ہوتا کہ ماس کو پ ق کے وسطی نقطہ کے ساتھ ملائیے والا خط آخر الامر پ ق پر عمود وار ہوگا۔

۲۱۔ تسلیم کر کے کہ مثلث (ج ج کے بیرون کا نیم قطر  $\frac{1}{2} \text{ ماس}$

ہے ثابت کرو کہ مثال ۱۹ سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ لشی دائرہ انخنا کے دائرہ ماس خلیق ہوتا ہے۔

۲۲۔ ثابت کرو کہ جب ایک ذرہ پر حاصل قوت حرکت کی سمت میں ہو تو راستہ کا ماس "اچل" ہوتا ہے۔

## امثلہ ۴۸

(لفاف - برہیچے)

۱۔ مکانیات  $ما' = ۴$  (لا - عا) کالافات خطوط مستقیم کا ایک جوڑا ہے جہاں عا متبدل ہے۔

۲۔ مکانی  $ما' = ۴$  (لا) کے کسی نقطہ پ سے محدودوں کے محوروں پر عمود پ م پ ن نکالے گئے ہیں م ن کالافات دریافت کرو۔

۳۔ خط لاجم  $ما' = ۴$  (لا - عا) کالافات دریافت کرو اور نیچے کا ہندسی مجموعہ بیان کرو۔

۴۔ مکانیوں  $ما' = ۴$  (لا - عا) کالافات جہاں عا متبدل ہے یہ منحنی ہے  $ما' = ۴$  (لا)۔

۵۔ ایک منحنی کے مستقیم نیم قطرون کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں، ہندسی طریق پر ثابت کرو کہ ان کالافات دے ہوئے منحنی کا پائین خط ہے لمحاظ مبدا کے۔

۶۔ مخروطی تراش کے ماسکی وتروں کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں، ان کالافات معلوم کرو۔

۷۔ ایک دائرہ کے محیط پر کے ثابت نقطہ میں سے وتر کھینچے گئے ہیں، ان وتروں کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ دائروں کالافات خط صنوبری ہے۔

۸۔ قائم قطع زائد کے مرکزی نیم قطروں کو قطر مان کر دائرے بنائے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کالافات بروٹولی کا چشمہ منحنی ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ منحنیات پ جم عا + ق جب عا = ط کالافات جہاں پ ق ط متغیروں (لا) ما کے دے ہوئے تفاعل ہیں اور عا متبدل ہے۔

پ + ق = ط ہے۔

۱۰۔ دائروں لا + ما = ۲ لا لاجم = ۲ لا واجب = ج کا لفاف دریافت کرو اور نتیجہ کی تعبیر بیان کرو۔

۱۱۔ ع اور ح کے درمیان رشتہ معلوم کرو کہ خط مستقیم

لا لاجم ح + واجب ح = ع دائروں (لا - ا) + ما = ب اور (لا + ح) + ما = ج سے مساوی طول کے دتر کاٹے۔ ثابت کرو کہ اس شرط کے ماتحت خط کا لفاف قطع مکانی ہے۔

۱۲۔ مستقل رقبہ کے ناقصوں کا ایک نظام ہے جن کا مرکز وہی ہے اور جن کے عمودیت میں ایک دوسرے پر منطبق ہیں، ثابت کرو کہ لفاف دو عمود و ج قائم الزا کو پر مشتمل ہے۔

۱۳۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ثابت نقطوں (ج، ح) سے اس پر کے عمودوں کا حاصل ضرب مستقل (= ب) ہے، ثابت کرو کہ لفاف ناقص ہے

$$\text{ناقص ہے } \frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ج} = ۱ \quad \text{اگر عمود شہرک خط کے ایک ہی}$$

$$\text{جانب ہوں یا زائد ہے } \frac{لا}{ب} - \frac{ما}{ج} = ۱ \quad \text{اگر عمود خط کی متقابل}$$

جانبوں میں ہوں۔

۱۴۔ قطع مکانی ما = ۴ لا کے دو ہرے معینوں کو قطران کر دائرے کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ ان کا لفاف ما = ۴ لا (لا + ا) ہے۔

$$۱۵۔ \text{قطع ناقص } \frac{لا}{۲ا} + \frac{ما}{ب} = ۱ \quad \text{کے دو ہرے معینوں کو}$$

قطران کر دائرے کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ لفاف ناقص  $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$  ہے۔

۱۶۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ثابت نقطوں (ج، ح) سے خط پر کے عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل (= ۴۲) ہے، ثابت کرو کہ لفاف



مخروطی تراش  $\frac{لا^۲}{۲ج-۲م} + \frac{ما^۲}{۲م} = ۱$  ہے، مختلف صورتوں کا معائنہ کرو۔  
 ۱۷۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت نقطوں سے اس کے عمودوں کے مربعوں کا فرق مستقل ہے، ثابت کرو کہ لفاف قطع ناقص ہے۔  
 ۱۸۔ ان ناقصوں  $لا = ۱$  جب  $(طما - صا)$   $ما = ب$  جم طما کا لفاف معلوم کر جہاں صا متبدل ہے۔

۱۹۔ متبدل ج کے لئے جوزنجیرے  $ما = ج$  جمنز  $(\frac{لا}{ج})$  سے تعبیر ہوتے ہیں ان کا لفاف دو خطوط مستقیم پر مشتمل ہے۔

۲۰۔ ان ناقصوں  $\frac{لا^۲}{۲صا} + \frac{ما^۲}{۲بما} = ۱$  کا لفاف جہاں  $صا + ب = م$  (مستقل) ستارہ نما  $لا^۲ + ما^۲ = م^۲$  ہے۔

۲۱۔ خط مستقیم کا لفاف جو محدودوں کے محوروں پر ایسے مقطوعے کا ثبوت ہے جن کا مجموعہ  $م$  ہے قطع مکانی  $لا + ما = م$  ہے۔  
 ۲۲۔ دو نقطے محدودوں کے محوروں پر مختلف، مستقل زقاروں سے حرکت کرنے سے ہیں ثابت کرو کہ ان کو ملانے والا خط ایک قطع مکانی کو مس کرتا ہے۔

۲۳۔ قطع ناقص  $\frac{لا^۲}{۲ا} + \frac{ما^۲}{۲ب} = ۱$  کے کسی نقطہ سے محدودوں کے محوروں پر عمود کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ ان عمودوں کے قدموں کو ملانے والے خط مستقیم کا لفاف  $(\frac{لا}{ا})^۲ + (\frac{ما}{ب})^۲ = ۱$  ہے۔

۲۴۔ منحیات  $صا = ما^۲ = لا (لا + صا)$  کے انتہائی نقاط تقاطع کا طریق دریافت کرو جہاں صا متبدل ہے۔ اور جو نتیجہ حاصل ہوا اس کا معائنہ کرو۔  
 ۲۵۔ مستقل نیم قطر کے ایک دائرہ کا مرکز ہمیشہ ایک دے ہوئے نغنی پر واقع

ہوتا ہے ثابت کرو کہ دائرہ کالفاف دو متوازی منحنی ہیں۔

۲۶۔ دئے ہوئے نیم قطر کا ایک دائرہ ایک دئے ہوئے منحنی کو مس کرتا ہے ثابت کرو کہ دائرہ کالفاف دو متوازی منحنیات پر مشتمل ہے۔

۲۷۔ اگر ایک منحنی کی مساوات اس شکل  $(x^2 + y^2 = r^2)$  میں دی ہوئی ہو تو اس کے کسی متوازی منحنی کی مساوات اس شکل  $(x^2 + y^2 = R^2)$  میں ہوگی۔

۲۸۔ ثابت کرو کہ منفی پائیں منحنیات (دفعہ ۱۳۱) کا مسئلہ خط مستقیم لا جم مسا + حاجب مسا = ع کالفاف معلوم کرنے کے معادل ہے جہاں ع متبادل مسا کا ایک دیا ہوا تفاعل ہے۔

اسکی تصدیق کرو کہ اسی سے دفعہ ۱۳۱ کا ضابطہ (۴) حاصل ہوتا ہے۔

۲۹۔ ثابت کرو کہ مکانی ما = ۱۴ ل کا منحنی پائیں منحنی بلحاظ اس کے یہ منحنی ہے ل ما = ۱۴ ل (۱۴ - ۱۴)۔

۳۰۔ لفافوں کے طریقہ سے ثابت کرو کہ دائرہ کالمنفی پائیں منحنی قطع ناقص ہوگا اگر قطب دائرہ کے اندر ہو اور قطع زائد ہوگا اگر قطب دائرہ کے باہر ہو۔

۳۱۔ ہندسی طریق پر ثابت کرو کہ مساوی الزاویہ لولبی کے کسی نقطہ پر انحناء کے نیم قطر کے سامنے قطب پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

۳۲۔ مساوی الزاویہ لولبی کا پرچہ اسی زاویہ کا مساوی الزاویہ لولبی ہوتا ہے۔

۳۳۔ قطع ناقص  $\frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} = 1$  کے پرچہ سے گھرا ہوا رقبہ

$\pi a b (1 - \frac{b^2}{a^2})$  ہے۔

۳۴۔ منحنی ل ما = ۱۴ ل کے کسی نقطہ پر کے مرکز انحناء کے محد ہیں

ضربا = لا - لا - ۹ - ۲ ل = حا = ۴ ما + ۴ ل - ۴ ل

ثابت کرو کہ بعد ا کے نزدیک پرچہ کی شکل مکانی ما = ۱۴ ل کی ہے۔

۳۵۔ ثابت کرو کہ اگر ایک منحنی نقطہ انعطاف رکھتا ہو تو اس کا پرچہ

ایک متقارب رکھنا ہے۔

ثابت کرو کہ منحنی  $\lambda^2 = \mu^2$  کے برہمچہ کا وہ حصہ جو منحنی کے اس حصہ کے جواب میں ہے جو مبدأ کی پڑوس میں ہے تقریباً قطع زائد  $\lambda^2 = \mu^2$  سے تعبیر ہو سکتا ہے۔

۳۶۔ قطع زائد  $\lambda^2 = \mu^2$  و جنم  $\epsilon$ ،  $\mu = \epsilon$  جب  $\epsilon$  کا برہمچہ

$(\lambda^2 - \mu^2) = \epsilon^2$  ہے۔

۳۷۔ نقطہ  $\omega$  سے شعاعیں نکلا کر ایک دے ہوئے منحنی سے منعکس

ہوتی ہیں، ثابت کرو کہ منعکسہ شعاعیں سب کی سب ایسے منحنی پر عماد ہیں جو لمباظ  $\omega$  کے، معلومہ منحنی کے پائیں منحنی کا مشابہ ہے لیکن دہرے ابعاد والا ہے۔

۳۸۔ اس لئے ثابت کرو کہ دائرہ پر کے انعکاس سے جو آتشی بنتا ہے

وہ گھونگا منحنی کا برہمچہ ہے۔ اور اس خاص صورت میں جبکہ روشن نقطہ دے ہوئے دائرہ کے محیط پر واقع ہے آتشی خط صنوبری ہے۔

۳۹۔ ثابت کرو کہ کسی منحنی پر انعکاس سے جو آتشی بنتا ہے وہ ایسے دائرہ

کے نظام کے لفاف کا برہمچہ ہے جو منحنی کے مختلف نقطوں کو مرکز مان کر کھینچے

جائیں اور سب کی سب روشن نقطہ میں سے گزریں۔

انفکات کی صورت میں متناظر مسئلہ کیا ہوگا۔

## امثلہ ۴۹

(گردونے وغیرہ)

۱۔ ایک پتھر کسی طرح سے بھی اپنے مستوی میں حرکت کرتا ہے، ثابت کرو کہ پتھر سے میں کے متوازی خطوط متوازی نغضیات کو لفٹ کرتے ہیں۔

۲۔ ایک خط مستقیم اس طرح حرکت کرتا ہے کہ یہ ہمیشہ ایک ثابت نقطہ

و میں سے گزرتا ہے اور اس پر کا ایک نقطہ  $Q$  ایک دائرہ کے محیط پر واقع

ہوتا ہے جو  $Q$  میں سے گزرتا ہے، ثابت کرو کہ فوری مرکز  $Q$  میں سے گزرنے والے

قط کا دوسرا سرا ہے اور دو مرکز طریق دریافت کرو۔  
گھونگھانی منحنی کے عماد کھینچنے کا عمل دریافت کرو اور اس سے یہ نتیجہ حاصل کرو کہ خط  
منوبری میں 'قرن' میں سے گزرنے والے وتر کے سروں پر کے عماد 'اس' خط پر  
علی القواطم کاٹتے ہیں جو اس نقطہ (قرن) میں سے وتر پر عمود ہو۔

۳۔ ایک مستوی شکل اس طرح حرکت کرتی ہے کہ اس میں کے دو خطوط مستقیم  
دو ثابت دائروں کو مس کرتے ہیں 'دو مرکز طریق کو دریافت کرو۔

۴۔ اگر ایک دائرہ اپنے سے نصف ناپ کے ایک ثابت دائرہ پر لڑکے  
اور پورا اس کے گرد آجائے تو ہر ایک خط مستقیم جو لڑکنے والے دائرہ پر سوار ہو ایک  
دائرہ کو لطف کر گیا۔

۵۔ اگر ایک مستوی شکل اس طرح حرکت کرے کہ اس میں کا ایک خط مستقیم  
ایک ثابت دائرہ پر لڑکے تو شکل میں کے کسی اور خط مستقیم کا لٹاف دائرہ کا ایک  
دریچہ ہے۔

۶۔ خط مستقیم  $عہا$  لا + بہا ما = ا کے لٹاف کا نیم قطر انخا جہاں  
 $عہا$  بہا متبدلات کے دے ہوئے تفاعل ہیں  $\pm (عہا + بہا) \pm (عہا - بہا)$   
 $(عہا - بہا) \pm (عہا - بہا)$

ہے جہاں زیریں لمحات کے تفرقوں کو تعبیر کرتی ہیں۔

۷۔ اگر ایک منحنی جسکی تماس قطبی مساوات  $ر = ف (ع)$  ہے ایک ثابت

خط مستقیم پر لڑکے تو قطب کے راستہ کا انخا ہے۔  $فرع (ع)$  جہاں مرکز نقطہ

تماس کا سمتی نیم قطر ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ اگر قطع مکانی ایک ثابت خط مستقیم پر لڑکے تو ماسکہ کا راستہ زنجیرہ

۹۔ اگر ایک مخروطی تراش ایک ثابت خط مستقیم پر لڑکے تو کسی ایک ماسکہ کا

راستہ ایک منحنی ہے  $\frac{1}{ر} + \frac{1}{س} = \frac{1}{ج}$  جہاں  $س$  نیم قطر انخا ہے 'د عماد

ہے اور ج مستقل۔

۱۰۔ اگر ایک مساوی الزویہ لولبی ایک ثابت خط مستقیم پر لڑکے تو قطب کا راستہ ایک خط مستقیم ہوگا۔

۱۱۔ اگر متکافی لولبی  $\frac{1}{\sin \theta}$  ایک خط مستقیم پر لڑکے تو قطب کا راستہ خط جبری ہوگا۔

۱۲۔ اگر کوٹس کے لولبیوں  $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \phi} + \frac{1}{\sin \psi}$  ب میں سے کوئی ایک، ایک خط مستقیم پر لڑکے تو قطب ایک منحنی مرتسم کرے گا جس کا انحنایسے بدلیگا جیسے عادی۔

۱۳۔ ایک منحنی ایک ثابت خط مستقیم پر لڑتا ہے، ثابت کرو کہ اس گردونیہ کی قوس جسے کوئی برداشتہ نقطہ مرتسم کرتا ہے اس منحنی کی متناظر قوس کے مساوی ہے جو لمجا ط و کے دے ہوئے منحنی کا پائیں منحنی ہے۔ [Steiner]

۱۴۔ بند بیضوی منحنی ایک ثابت خط مستقیم پر لڑتا ہے، ثابت کرو کہ وہ متغیر خط جو نقطہ تماس کو اندرونی محمولہ نقطہ و سے ملتا ہے ایک پوری گردش میں اتنا رقبہ عبور کرتا ہے جو لمجا ط نقطہ و دے ہوئے منحنی کے پائیں منحنی کے رقبہ کا دوچند ہے۔ [Steiner]

۱۵۔ فوری مرکز کے نظریہ سے ثابت کرو کہ جب جوڑ دار ڈنڈوں کے مستوی ذواربعۃ الاضلاع سے گھرا ہوا رقبہ اپل (ساکن) ہو تو وہ ذواربعۃ الاضلاع ہم محیط ہوگا۔



## اصطلاحات صغاری احصاء

## جلد دوم

(۳۰)

Circuit	شکر	Acoustics	علم آواز
Cisoid	لبلائی خط	Anchor-ring	لنگر آچلا
Comet	شهاب	Annular	حلقه دار طلقه نما
Commensurable	متوائق	Astroid	ستاره نما
Cone	مخروط	Asymptotes	متقارب
Conic	مخروطی	Auxiliary circle	معاون دایره
Contour line	هم ارتفاعی خط	Bipolar	دوقطبی
Convergence	استدقاق	Body centrode	جسمی مرکز طریق
Crank	کرنیک	Cardioid	خط جنوبیری
Critical case	فاسل صورت	Carried line	خط برداشته
Crossed	{ متقاطع متوازی الاضلاع	Catenary	زنجیر
parallelogram		Caustic	آتشنی
Cusp	قصرن	Centrode	مرکز خط
		Centre of rotation	گها و گها مرکز

Impulse	دھک	Cyclic	ہم محیط
Indefinite	نامحدود و تکملہ	Quadrilateral	چار اضلعی
Integral		Cycloid	خط تدویر
Indicator	نمائندہ تصویر	Definite integral	محدود و تکملہ
diagram		Directrix	مرتب
Index	نمائندہ ، اشاریہ	Eccentricity	خروج المرکز
Instantaneous	فوری مرکز	Ecliptic	طریق الشمس
centre		Ellipsoid	ناقص نما
Integral	تکملہ	Elliptic Integral	ناقصی تکملہ
Integration	تکمل	Ellipticity	ناقصیت
Integration	تکمل بالخصوص	Envelope	لحاف
by parts		Epicyclic	برودریہ
Intercept	ماہینی حصہ	Epicycloid	برتدویر
Interpolation	بینی ادراج	Epitrochoid	ہماستداری
Interval	وقفہ	Equipotential	ہم قوتہ
Intrinsic	ذاتی مساوا	Evolute	پیشہ
equation		Flexure	خم
Inverse	مقلوب	Focus	بازو
Inversion	تغلیب	Frustum	ناقص ، نامکمل
Involute	درجہ	Geodesy	مقطوعہ
Irrational	غیر ناطق	Harmonic	درنسیات
Lamina	پترا	Hyperboloid	موسیقی
Latus-rectum	دتر خاص	Hypocycloid	زائد نما
Lemniscate	چشمہ منحنی	Hypotrochoid	درتدویر
Limacon	گھونٹکا منحنی		برتدویر

Point-roulette	نقطه گردونه	Line-roulette	خط گردونه
Polar	قطبی	Linkage	رابطه
Pole	قطب	Link-work	رابطه کاری
Prolate Ellipsoid	لبوترز ناقص نما	Loop	حلقه
Prolate spheroid	لبوترز کره نما	Magnetic curves	مقناطیسی منحنی
Pyramid	مخروط مضلع	Mechanical	مسیلی
Quadrature	تربیع	Modulus	مقیاس
Range	منطقه	Multiple Integral	منفی تکمله
Rational	نسبانی	Node	عقد
Reciprocal	تقابل	Optical	شناختی
Rectification	تخطیط	Optics	علم مناظر
Reduction	تحويل	Orientation	تشریح
Reflection	انعکاس	Oscillating	اهتزازی
Refraction	انعطاف	cylinder	اسطوانه
Refractive Index	انعطاف نما	Osculating circle	لمسی دایره
Retrograde	رجعی	Oval	بیض
Rolling	راولکنی	Paraboloid	مکانی نما
curves	غلطان منحنی	Parameter	متبدل
Roulette	گردونه	Partial	جسندی
Screw-thread	پیچ تاگانه	Pericycloid	گرد تندیر
Semi-cubical	نیم گنبدی	Period	دور
parabola	نیم گنبدی مکانی	Phase	هئیت
Space centrode	فضائی مرکز حرکتی	Piston	فشاره
Space Integral	مکانی تکمله	Pivot	چول
Spandril	کمان شانه	Planimeter	شماره پیم



Tractrix	خط جبری	Spheroid	کرہ نما
Trajectory	خطاری	Spiral	لولبی
Transcendental	ماورائی	Stationary	اخیل، تقیم
Trapezium	منحرف	Steam Engine	بھاپ انجن
Trochoid	استداری خط	Surface of revolution	گردشی سطح
Undulation	موج	Tension	تشیاد
Vector	سمتی	Tidal clock	موج گھڑی
Witch of Agnesi	اگنسی کی ڈاین	Time integral	زمانی تکاملہ

## اشاریہ

## اعلام محفوظ کے لحاظ سے

- اچیل ٹاس، ۲۵۷  
 اچیل نقطہ، ۲۵۷  
 ارشمیدس کا لولب، ۲۱۲  
 استداری خط، ۲۰۵  
 استدقاق، محدود تکمیل کا، ۲۸۳  
 انتقالیت (ہٹاؤ)، مستوی شکل کی، ۲۸۸، ۵۰۱  
 اثبت، ۲۵۴، ۲۶۴، ۲۶۸  
 اوسط قیمت کا مسئلہ، ۲۸۸  
 اوسط قیمتیں، ۳۵۷  
 اوسط مرکز، ہندسی اشکال کا، ۳۶۰  
 ایسلر کا سطح پیمائش، ۳۲۹  
 براستداری، ۲۱۰  
 برہمچر، ۲۷۸، ۲۸۳  
 برتدویر، ۲۰۷، ۲۵۹، ۲۸۲، ۲۹۵، ۲۹۹، ۵۰۱، ۵۰۴  
 بردورے، ۲۱۶، ۵۰۳  
 برنولی کا چشمہ منحنی، ۲۲۵، ۲۲۹

- پائین منحنی ، ۴۳۲  
 پوشیدہ کا رابطہ ، ۴۳۰  
 پیش کے مسئلے ، ۳۶۴  
 تبدیلی ، تغیر کی ، ۲۳۵ ، ۲۹۸  
 تحویل ، ضابطے ، ۲۴۴ ، ۲۴۶ ، ۲۹۸  
 تریج ، تقریبی ، ۳۵۳  
 تفرق ، محدود و نامحدود کا ، ۲۸۹  
 تقریبی تکمیل ، ۳۵۳  
 تقابیل ، ۴۲۹ ، ۴۳۰  
 تکمیل ، ۲۲۱  
 باحصص ، ۲۴۱  
 ابدال سے ، ۲۳۵ ، ۲۳۸ ، ۲۴۰  
 غرضتوں ، تفاعلوں کا ، ۲۳۲ ، ۲۵۷  
 منطق کسروں کا ، ۲۲۸ ، ۲۴۸ ، ۲۵۱ ، ۲۵۳  
 منطقی تفاعلوں کا ، ۲۳۸ ، ۲۹۸  
 تکمیل ، محدود ، ۲۸۰ ، ۲۸۲ ، ۲۸۷ ، ۲۹۱ ، ۳۰۲  
 تقریبی قیمت ، ۳۵۳  
 ضعفی ، ۳۶۸  
 چار سطحی ، اسکا حجم ، ۳۲۵  
 شش منحنی ، برزوالی کا ، ۴۲۵ ، ۴۲۹  
 چلبی متوازی الاضلاع ، ۴۳۲  
 حجم ، جسموں کے ، ۳۳۲ ، ۳۳۴ ، ۳۳۶ ، ۳۶۹  
 خط تدویر ، ۴-۳ ، ۴۵۸ ، ۴۸۱ ، ۴۸۲ ، ۴۹۵ ، ۴۹۹ ، ۵۰۱  
 خط جبری ، ۳۹۹  
 خط گرد و نیہ ، ۴۹۹

- دائرہ کادریچہ ، ۴۱۱ ، ۴۸۷  
 دراستداری ، ۴۱۰  
 دریچہ ، ۴۸۶  
 درندویر ، ۴۰۸ ، ۴۰۷  
 دو قطبی محدود ، ۴۳۷  
 ذاتی مسادات ، مخفی کی ، ۴۵۸  
 رقبہ ، ۲۰۱ ، ۳۱۷  
 انس کی علامت ، ۳۲۱  
 جو ایک متحرک خط عبور کرے ، ۳۲۷  
 رقبہ ، مستوی مخفیوں کے ، ۳۱۷ ، ۳۱۸ ، ۳۲۴  
 اسکی آلی پیمائش ، ۳۲۹  
 زائد ، ۳۱۹ ، ۴۲۸ ، ۴۲۹  
 زنجیرہ ، ۳۲۳ ، ۳۹۷ ، ۴۵۸ ، ۴۶۳  
 ستارہ نما ، ۴۱۶ ، ۴۹۳  
 سطح پیمائش ، ۳۲۹  
 سپین کے قاعدے ، ۳۴۱ ، ۳۵۶  
 صنوبری (خط) ، ۴۱۳  
 ضغنی مکمل ، ۳۶۸  
 عقدہ ، ۴۹۰  
 عقدوں کا طریق ، ۴۷۸  
 علامت رقبہ کی ، ۳۲۱  
 فوری مرکز ، ۴۸۸ ، ۴۹۴ ، ۵۰۱  
 قرون کادائرہ ، ۵۰۱  
 قطبی ، مسکاتی ، ۴۳۲  
 قوس (مخفی کی) ، ضابطے ، ۴۴۳ ، ۴۴۷ ، ۴۴۸

- قیمت، ۳۵۷ کی  
 کارٹینز بیضہ، ۳۳۹  
 کرہ، اسکی سطح، ۳۵۱  
 اس کا حجم، ۳۳۶  
 کردی قطعہ، اس کا حجم، ۳۳۶  
 کعبی غنیا، ۳۹۱  
 کوش کا طریقہ، تقریبی شکل کا، ۳۵۴  
 کیسینی کے بیضے، ۴۲۰  
 گردیدہ دیر، ۴۰۷، ۴۰۹  
 گردشی سطح، اس کا رقبہ، ۳۴۹  
 اس کا اوسط مرکز، ۳۶۲  
 گردونے، ۴۹۳، ۴۹۵، ۴۹۹  
 گھونگا منحنی، ۴۱۴، ۴۲۳  
 لشی دائرہ، ۴۶۸  
 لفاف، ۴۷۰، ۴۷۵  
 لنگر جھلہ، ۳۳۷  
 لوبی، مسادی الزادیہ، ۴۲۱، ۴۶۰  
 ارشمیدس کا، ۴۱۲  
 متکانی، ۴۲۳  
 لیسازو کا منحنی، ۴۰۰  
 تنغیر کی تبدیلی، شکل میں، ۴۳۵، ۴۴۰  
 متکانی قطبی، ۴۳۲  
 متکانی بولب، ۴۲۳  
 متواری منحنی، ۴۸۶  
 مخروط، قائم مستدیر، ۳۴۱، ۳۴۹، ۳۶۳

مرکز خط، ۵۰۱  
 مزدوج نقطه، ۳۹۰  
 مساوی الزاویه لوبی، ۴۶۰، ۴۲۱  
 مقناطیسی منحنی، ۴۴۱  
 مکانی، ۲۷۵، ۳۲۰، ۳۳۳، ۳۶۲، ۴۲۷، ۴۵۹، ۴۶۳، ۴۶۶  
 ۴۷۹، ۴۷۹  
 مکانی نام، ۳۲۶، ۳۳۷، ۳۶۳  
 ماسی قطبی مساوات، ۴۲۶  
 ناقص، ۳۱۹، ۳۲۷، ۳۴۶، ۴۲۹، ۴۵۹، ۴۶۶، ۴۸۰، ۴۸۵  
 ۴۹۰، ۵۰۳  
 ناقص نام، ۳۲۸، ۳۶۴  
 گردش، اسکی سطح، ۳۵۲  
 ناقصی شکل، ۳۴۷  
 نقطه گردونه، ۴۹۳، ۴۹۵  
 نیم کروی مکانی، ۲۹۴  
 نیون کا طریقہ، انحناء پر بحث کرنیکا، ۴۶۴  
 ہارٹ کا رابطہ، ۴۳۲

















